

◆ 10. 통계(기본문제)

1. $N = \sum_{i=1}^n f_i$, $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i f_i$ 이고 a, b 가 상수일 때, 등식 $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (ax_i + b)f_i = a\bar{x} + b$ 가 성립함을 증명하여라.

해설 > $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (ax_i + b)f_i = \frac{1}{N} (a \sum_{i=1}^n x_i f_i + b \sum_{i=1}^n f_i) = \frac{1}{N} (aN\bar{x} + bN) = a\bar{x} + b$

2. A, B 두 반의 학생 수는 각각 n_1, n_2 명이고, 이 두 반의 수학 성적의 평균은 각각 m_1, m_2 라 한다. 두 반을 합한 $n_1 + n_2$ 명의 수학 성적의 평균을 구하여라.

정답 > $\frac{n_1 m_1 + n_2 m_2}{n_1 + n_2}$

해설 > A반의 수학 성적의 총점은 $n_1 m_1$ 이고, B반의 수학성적의 총점은 $n_2 m_2$ 이므로

전체 평균은 $\frac{n_1 m_1 + n_2 m_2}{n_1 + n_2}$

3. 변량 x_1, x_2, \dots, x_{50} 에서 가평균을 80이라 할 때 각 변량에서 가평균을 뺀 값들의 총합이 300이라 한다. 이 변량의 평균을 구하여라.

정답 > $\bar{x} = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} x_i$

해설 > $x_0 = 80, y_i = x_i - x_0 \quad \sum_{i=1}^{50} x_i = 300 + 5x_0 = 300 \quad \therefore \sum_{i=1}^{50} x_i = 300 + x_0 = 300 + 4000 = 4300$

$\therefore \bar{x} = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} x_i$

4. 변량 x_1, x_2, \dots, x_n 의 도수가 각각 f_1, f_2, \dots, f_n 이고, 이 변량의 평균이 \bar{x} , 분산이 s^2 이라 한다.

$f(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - x)^2 f_i$ 를 최소로 하는 x 의 값과 이 때의 최소값을 구하여라. 단, $\sum_{i=1}^n f_i = N$ 이다.

정답 > $x = \bar{x}$ 일 때 최소값 Ns^2

해설 > $f(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - x)^2 f_i = \sum_{i=1}^n (x_i^2 f_i - 2xx_i f_i + x^2 f_i)$
 $= \sum_{i=1}^n x_i^2 f_i - 2x \sum_{i=1}^n x_i f_i + x^2 \sum_{i=1}^n f_i = Nx^2 - 2xN\bar{x} + N(s^2 + \bar{x}^2)$
 $= n(x - \bar{x})^2 + Ns^2$
 $\therefore x = \bar{x}$ 일 때 최소값 Ns^2

5. 1, 2, 3, ..., n 의 평균과 분산을 구하여라.

정답 > 평균: $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k = \frac{n+1}{2}$ 분산: $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k^2 - \bar{x}^2 = \frac{n^2-1}{12}$

<해커스공무원 2015년 9-10월 김준P 기본이론반 해설지>

6. 변량 x_1, x_2, \dots, x_n 의 평균이 m , 표준편차가 σ 일 때, 변량 $\frac{x_1 - m}{\sigma}, \frac{x_2 - m}{\sigma}, \dots, \frac{x_n - m}{\sigma}$ 의 평균과 표준편차를 구하여라.

정답» 평균 : 0, 표준편차 : 1

해설» $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i - m}{\sigma} = \frac{1}{n\sigma} \left(\sum_{i=1}^n x_i - nm \right) = \frac{1}{n\sigma} (nm - nm) = 0$

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - m}{\sigma} \right)^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{n\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 = \frac{n\sigma^2}{n\sigma^2} = 1$$

∴ 평균 : 0, 표준편차 : 1

7. 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나타나는 두 눈의 수의 합을 X 라하고, X 의 확률분포를 구하여라. 또, 확률 $P(2 \leq X \leq 4)$ 를 구하여라.

정답» $\frac{1}{6}$

해설»

X	2	3	4	5	6	7
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$
X	8	9	10	11	12	계
$P(X=x)$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	

$$P(2 \leq X \leq 4) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = \frac{1}{6}$$

8. 연속확률변수 X 가 취하는 값의 범위가 $0 \leq X \leq 1$ 이고, 확률밀도함수가 $f(x) = kx$ 일 때 다음 물음에 답하여라. (단, k 는 상수)

(1) k 의 값을 구하여라. (2) $P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하여라.

정답» (1) $k=2$ (2) $\frac{5}{36}$

해설» (1) $f(x)$ 가 X 의 확률밀도함수이므로 $\int_0^1 f(x)dx = 1$ 이다.

따라서, $\int_0^1 kxdx = \left[\frac{1}{2} kx^2 \right]_0^1 = \frac{k}{2} = 1 \quad \therefore k=2$

$$(2) P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} 2xdx = \left[x^2 \right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{5}{36}$$

9. 연속확률변수 X 가 취하는 값의 범위가 $0 \leq X \leq 2$ 이고, 확률밀도함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} kx & (0 \leq x \leq 1) \\ -k(x-2) & (1 \leq x \leq 2) \end{cases} \text{ 와 같이 주어졌을 때, 다음 물음에 답하여라.}$$

(1) 상수 k 의 값을 구하여라. (2) $P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하여라.

정답≫ (1) $k=1$ (2) $\frac{1}{8}$

해설≫ (1) $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 kxdx + \int_1^2 k(2-x)dx = k\left[-\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + k\left[2x - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}k = k = 1$

∴ $k=1$

(2) $\int_0^{\frac{1}{2}} xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$

10. 50원짜리 동전 두 개와 100원짜리 동전 한 개를 동시에 던져서 앞면이 나타내는 동전 금액의 합 X 의 확률분포를 구하여라. 또, 확률변수 X 의 평균, 분산, 표준편차를 구하여라.

해설≫ X 의 확률분포는 아래의 표와 같다. 따라서, 구하는 평균, 분산, 표준편차는 다음과 같다.

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 50 \times \frac{2}{8} + 100 \times \frac{2}{8} + 150 \times \frac{2}{8} + 200 \times \frac{1}{8} = 100$$

$$V(X) = 0^2 \times \frac{1}{8} + 50^2 \times \frac{2}{8} + 100^2 \times \frac{2}{8} + 150^2 \times \frac{2}{8} + 200^2 \times \frac{1}{8} - 100^2 = 3750$$

$$\sqrt{V(X)} = \sqrt{3750} \doteq 61.2$$

X	0	50	100	150	200
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$

11. 한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수를 X 라고 할 때, 확률변수 X 의 분산과 표준편차를 구하여라.

정답≫ $V(X) = \frac{35}{12}$, $\sigma(X) = \frac{1}{6}\sqrt{105}$

정답≫ $E(X) = \sum_{k=1}^6 \frac{1}{6}k = \frac{7}{2}$, $V(X) = \sum_{k=1}^6 \frac{1}{6}k^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$, $\sigma(X) = \frac{1}{6}\sqrt{105}$

12. 연속확률변수 X 의 확률밀도함수가 $f(x) = \frac{3}{4}(1-x^2)$ (단, $-1 \leq x \leq 1$)일 때, X 의 평균과 분산 및 표준편차를 구하여라.

정답≫ $E(X) = 0$, $V(X) = \frac{1}{5}$, $\sigma(X) = \frac{\sqrt{5}}{5}$

해설≫ $E(X) = \int_{-1}^1 xf(x)dx = \int_{-1}^1 \frac{3}{4}(x-x^3)dx = 0$

$$V(X) = \int_{-1}^1 (x-m)^2 f(x)dx = \int_{-1}^1 x^2 \left\{ \frac{3}{4}(1-x^2) \right\} dx = \int_{-1}^1 \frac{3}{4}(x^2-x^4)dx$$

$$= 2 \cdot \frac{3}{4} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{5}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

13. 구간 $[0, 1]$ 의 임의의 값을 취하는 연속확률변수 X 의 확률밀도함수가 $f(x) = kx^2$ 으로 주어졌을 때, 상수 k 의 값과 평균 및 분산을 각각 구하여라.

정답≫ $k=3, E(X)=\frac{3}{4}, V(X)=\frac{3}{80}$

해설≫ $k \int_0^1 x^2 dx = 1$ 에서 $k=3$

$$E(X) = \int_0^1 x(3x^2)dx = \frac{3}{4}, \quad V(X) = \int_0^1 \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 (3x^2)dx = \frac{3}{80}$$

14. 구간 $[a, b]$ 의 임의의 값을 취하는 연속확률변수 X 의 확률밀도함수가 $f(x)$ 이고, $E(X)=m$ 일 때,
 $V(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - m^2$ 이 성립함을 증명하여라.

해설≫ $\int_a^b f(x)dx = 1, m = \int_a^b xf(x)dx$ 이므로

$$\begin{aligned} V(X) &= \int_a^b (x-m)^2 f(x)dx = \int_a^b (x^2 - 2mx + m^2) f(x)dx = \int_a^b x^2 f(x)dx - 2m \int_a^b xf(x)dx + m^2 \int_a^b f(x)dx \\ &= \int_a^b x^2 f(x)dx - 2m \cdot m + m^2 = \int_a^b x^2 f(x)dx - m^2 \end{aligned}$$

15. 연속확률변수 X 의 평균, 표준편차가 각각 m, σ 일 때, $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ 의 평균은 0, 분산은 1임을 증명하여라.

해설≫ $1 = \int_a^b \frac{1}{\sigma} f(x)dx, m = \int_a^b xf(x)dx, V(X) = \int_a^b (x-m)^2 f(x)dx$ 이므로

$$E(Z) = \int_a^b \frac{x-m}{\sigma} f(x)dx = \frac{1}{\sigma} \int_a^b (xf(x) - mf(x))dx = \frac{1}{\sigma} (m - m) = 0$$

$$V(Z) = E((Z-0)^2) = E(Z^2) = \int_a^b \frac{(x-m)^2}{\sigma^2} f(x)dx = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sigma^2 = 1$$

16. 다음 확률변수 X 의 확률분포는 이항분포임을 보이고, 그것을 $B(n, p)$ 의 꼴로 나타내어라.

- (1) 한 개의 주사위를 10회 던질 때, 5의 눈이 나오는 횟수 X
 (2) 두 개의 동전을 동시에 던지는 시행을 8회 반복하여 두 개 모두 앞면이 나오는 횟수 X
 (3) 위 (1), (2)에 대한 확률분포표를 만들어라.

정답≫ (1) $B\left(10, \frac{1}{6}\right)$ (2) $B\left(8, \frac{1}{4}\right)$ (3) 해설참조

해설≫ (1) $P(X=r) = {}_{10}C_r \left(\frac{1}{6}\right)^r \left(\frac{5}{6}\right)^{10-r} \therefore B\left(10, \frac{1}{6}\right)$

(2) $P(X=r) = {}_8C_r \left(\frac{1}{4}\right)^r \left(\frac{3}{4}\right)^{8-r} \therefore B\left(8, \frac{1}{4}\right)$

(3) (1)의 확률분포표

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{5^{10}}{6^{10}}$	$\frac{10 \cdot 5^9}{6^{10}}$	$\frac{45 \cdot 5^8}{6^{10}}$	$\frac{120 \cdot 5^7}{6^{10}}$	$\frac{210 \cdot 5^6}{6^{10}}$	$\frac{252 \cdot 5^5}{6^{10}}$
X	6	7	8	9	10	계
P	$\frac{210 \cdot 5^4}{6^{10}}$	$\frac{120 \cdot 5^3}{6^{10}}$	$\frac{45 \cdot 5^2}{6^{10}}$	$\frac{10 \cdot 5^1}{6^{10}}$	$\frac{1}{6^{10}}$	1

(2)의 확률분포표

<해커스공무원 2015년 9-10월 김준P 기본이론반 해설지>

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{3^8}{4^8}$	$\frac{8 \cdot 3^7}{4^8}$	$\frac{28 \cdot 3^6}{4^8}$	$\frac{56 \cdot 3^5}{4^8}$	$\frac{70 \cdot 3^4}{4^8}$
X	6	7	8	9	계
P	$\frac{56 \cdot 3^3}{4^8}$	$\frac{28 \cdot 3^2}{4^8}$	$\frac{8 \cdot 3^1}{4^8}$	$\frac{1}{4^8}$	1

17. 한 개의 주사위를 6회 던질 때, 2 이하의 눈이 나올 횟수를 X 라 한다. 확률변수 X 의 평균과 분산을 구하여라.

정답» $E(X)=2, V(X)=\frac{4}{3}$

해설» 매회의 시행에서 2 이하의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$ 이므로 X 는 이항분포 $B\left(6, \frac{1}{3}\right)$ 에 따른다. 따라서, 구하는 평균과 분산은 다음과 같다.

$$E(X)=np=6 \times \frac{1}{3}=2, V(X)=npq=6 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

18. 흰 공 6개, 검은 공 4개가 들어 있는 주머니에서 3개의 공을 꺼낼 때, 그 속에 포함된 흰 공의 개수 X 의 확률분포를 구하시오.

정답» $P(X=k)=\frac{{}_6C_k \times {}_4C_{3-k}}{{}_{10}C_3} \quad (k=0, 1, 2, 3)$

해설» 흰 공이 k 개 ($k=0, 1, 2, 3$) 포함될 확률 $P(X=k)$ 는 흰 공이 k 개일 때 검은 공이 $3-k$ 개이므로 $P(X=k)=\frac{{}_6C_k \times {}_4C_{3-k}}{{}_{10}C_3} \quad (k=0, 1, 2, 3)$

19. 세 개의 주사위를 동시에 던지는 시행을 300회 반복할 때, 다음 X 의 평균과 표준편차를 구하여라.

(1) 세 개 모두 3의 배수의 눈이 나오는 횟수 X

(2) 두 개는 6의 눈, 한 개는 홀수의 눈이 나오는 횟수 X

정답» (1) $m=\frac{100}{9}, \sigma=\frac{10\sqrt{78}}{27}$ (2) $m=\frac{25}{2}, \sigma=\frac{5}{12}\sqrt{69}$

해설» (1) $B\left(300, \frac{1}{27}\right)$ 에 따르면 $m=\frac{100}{9}, \sigma=\frac{10\sqrt{78}}{27}$

(2) $B\left(300, \frac{1}{24}\right)$ 에 따르면 $m=\frac{25}{2}, \sigma=\frac{5}{12}\sqrt{69}$

20. 한 상자에 들어 있는 100개의 상품 중에 10개의 불량품이 들어 있다. 이 상자에서 임의의 2개를 동시에 꺼낼 때, 그 속에 들어 있는 불량품의 개수의 평균과 분산을 구하여라.

정답» $B\left(2, \frac{1}{10}\right)$ 에 따르면 $m=\frac{1}{5}, \sigma^2=\frac{9}{50}$

21. 이항분포 $B(n, p)$ 의 평균이 20, 분산이 16이라고 한다. 이 때, n 과 p 의 값을 구하여라.

<해커스공무원 2015년 9-10월 김준P 기본이론반 해설지>

정답> $n=100, p=\frac{1}{5}$

22. 확률변수 X 가 정규분포 $N(30, 5^2)$ 에 따를 때, 확률 $P(26 \leq X \leq 40)$ 을 구하여라.

정답> 0.7653

해설> $Z = \frac{X-30}{5}$ 으로 놓고, 확률변수 X 를 표준화하면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 에 따른다.

$26 \leq X \leq 40$ 일 때, $\frac{26-30}{5} \leq Z \leq \frac{40-30}{5}$ 즉, $-0.8 \leq Z \leq 2$ 이므로 구하는 확률은

$$P(26 \leq X \leq 40) = P(-0.8 \leq Z \leq 2) = P(0 \leq Z \leq 0.8) + P(0 \leq Z \leq 2) = 0.2881 + 0.4772 = 0.7653$$

23. 확률변수 X 가 정규분포 $N(13, 4^2)$ 에 따를 때, 다음 확률을 구하여라.

(1) $P(7 \leq X \leq 19)$ (2) $P(X \leq 20)$ (3) $P(1 \leq X \leq 25)$

정답> (1) 0.8664 (2) 0.9599 (3) 0.9974

해설> (1) $P(7 \leq X \leq 19) = P(-1.5 \leq \frac{X-13}{4} \leq 1.5) = 2 \times 0.4332 = 0.8664$

(2) $P(X \leq 20) = P(\frac{X-13}{4} \leq 1.75) = 0.5 + 0.4599 = 0.9599$

(3) $P(1 \leq X \leq 25) = P(-3 \leq \frac{X-13}{4} \leq 3) = 2 \times 0.4987 = 0.9974$

24. 주사위를 720번 던질 때, 1의 눈이 94번 이상 135번 이하로 나올 확률을 구하시오. (단, 표준정규분포를 이용하시오.)

정답> 0.9285

해설> 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X 라고 하면, X 는 이항분포, $B(720, \frac{1}{6})$ 을 따른다.

$$\text{또, } E(X) = np = 720 \times \frac{1}{6} = 120$$

$$V(X) = npq = 720 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 100$$

$$\therefore \sigma(X) = 10$$

$n=720$ 은 충분히 큰 수이므로, 확률변수 X 는 정규분포 $N(120, 10^2)$ 을 따른다고 볼 수 있다. 따라서

$$P(94 \leq X \leq 135) = P\left(\frac{94-120}{10} \leq \frac{X-120}{10} \leq \frac{135-120}{10}\right)$$

$$= P(-2.6 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 2.6) + P(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= 0.4953 + 0.4332 = 0.9285$$

25. $E(X)=m, \sigma(X)=\sigma$ 인 변수 X 의 분포에서 $E\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)$ 과 $\sigma\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)$ 을 구하시오.

정답> 0, 1

$$\text{해설> } E\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) = \frac{E(X)-m}{\sigma} = \frac{m-m}{\sigma} = 0 \quad \sigma\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) = \frac{\sigma(X)}{|\sigma|} = \frac{\sigma}{\sigma} = 1$$

<해커스공무원 2015년 9-10월 김준P 기본이론반 해설지>

26. X 의 확률분포가 $P(X=-1)=\frac{1}{6}$, $P(X=1)=a$, $P(X=2)=\frac{1}{3}$ 일 때, $P(X^2=1)$ 의 값을 구하시오.

정답≫ $\frac{2}{3}$

해설≫ 확률의 총합은

$$P(X=-1)+P(X=1)+P(X=2)=\frac{1}{6}+a+\frac{1}{3}=1 \text{ 이므로 } a=\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} P(X^2=1) &= P(X=1) \text{ 또는 } (X=-1) \\ &= P(X=1)+P(X=-1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3} \end{aligned}$$

27. 모평균 10, 모분산 4인 모집단에서 크기 25인 표본을 복원 추출할 때, 그 표본평균 \bar{X} 의 평균과 표준편차를 구하여라.

정답≫ $E(\bar{X})=10$, $\sigma(\bar{X})=\frac{2}{5}$

28. 전구를 대량 생산하고 있는 공장이 있다. 어느 날 생산된 전구 중에서 100개의 전구를 임의추출하여 수명을 조사한 결과가 평균이 1000시간, 표준편차가 50시간이었다.

- (1) 신뢰도 95%로 모집단에서의 평균수명을 추정하여라.
(2) 신뢰도 99%로 모집단에서의 평균수명을 추정하여라.

정답≫ (1) [990.2, 1009.8] (2) [987.1, 1012.9]

해설≫ (1) $1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 9.8 \quad \therefore [990.2, 1009.8]$

(2) $2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 12.9 \quad \therefore [987.1, 1012.9]$

29. 어떤 공장에서 생산된 제품 한 개의 무게의 표준편차는 5 g이다. 모평균 m 을 신뢰도 99%로 추정할 때, 그 신뢰구간의 폭을 0.3g 이하로 하려면 표본의 크기 n 은 얼마로 하면 좋은가?

정답≫ 7396이상

해설≫ 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간의 폭은 $2 \times 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 이므로 $2 \times 2.58 \frac{5}{\sqrt{n}} \leq 0.3$

$$\therefore n \geq \left(\frac{25.8}{0.3} \right)^2 = 7396$$

따라서, 표본의 크기는 7396이상이다.

30. 표준편차가 2로 알려진 정규분포를 따르는 모집단의 평균에 대한 일정한 신뢰도의 신뢰구간을 표본평균을 이용하여 구하려고 한다. 표본의 크기가 16일 때 신뢰구간의 길이가 2이다. 신뢰구간의 길이를 1로 하려면 표본의 크기는 얼마로 하여야 하는가?

정답≫ 64