

01. 롤의 정리와 평균값 정리



LECTURE'S POINT

1. 롤의 정리

<확인 문제 01>

함수 $f(x) = (x-1)(x+1)(x-2)$ 에 대하여 닫힌 구간 $[1, 2]$ 에서 롤의 정리를 만족시키는 상수 c 의 값은?

- ① $\frac{2-\sqrt{7}}{3}$ ② -1 ③ 1 ④ $\frac{2+\sqrt{7}}{3}$



LECTURE'S POINT

2. 평균값 정리

<확인 문제 02>

함수 $f(x) = x^3 - 2x$ 에서 닫힌 구간 $[0, 3]$ 에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c 의 값은?

- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $\sqrt{7}$

실전 문제

<실전 문제 01> 다음 함수에 대하여 닫힌 구간 $[2, 4]$ 에서 롤의 정리를 만족시키는 실수 c 의 값은?

$$f(x) = (x+2)(x-2)(x-4)$$

- ① $\frac{4+2\sqrt{7}}{3}$ ② $\frac{4+2\sqrt{7}}{4}$
 ③ $\frac{4-3\sqrt{7}}{2}$ ④ $\frac{4+3\sqrt{7}}{2}$

<실전 문제 02> 다음 함수에 대하여 닫힌 구간 $[1, 4]$ 에서 평균값 정리를 만족시키는 실수 c 의 값은?

$$f(x) = -x^2 + 6x - 8$$

- ① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$

<실전 문제 03> 함수 $f(x) = x^3 + kx + 4$ 에 대하여 닫힌 구간 $[-1, 2]$ 에서 롤의 정리를 만족시키는 상수 c 의 값은? (단, k 는 상수이다)

- ① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1

<실전 문제 04> 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 5$ 에 대하여 닫힌 구간 $[1, a]$ 에서 롤의 정리를 만족시키는 상수 c 가 존재할 때, $a+c$ 의 값은? (단, $1 < c < a$)

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6

<실전 문제 05> 함수 $f(x) = 3x^3 - x$ 에 대하여 닫힌 구간 $[-1, 1]$ 에서 평균값 정리를 만족시키는 모든 상수 c 의 값의 곱은?

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{3}$ ④ $-\frac{1}{5}$

<실전 문제 06> 닫힌 구간 $[-1, 1]$ 에서 평균값 정리를 만족시키는 상수가 존재하는 함수만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $f(x) = x^2 + 2x$	ㄴ. $g(x) = x + 1 $	ㄷ. $h(x) = \frac{1}{x}$
----------------------	---------------------	-------------------------

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ

<실전 문제 07> 함수 $f(x) = x^3 - x$ 에 대하여 닫힌 구간 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ 에서 평균값 정리를 만족시키는 c 의 값은?

- ① -1 또는 1 ② 1 또는 2 ③ 2 또는 3 ④ 3
또는 4

<실전 문제 08> 함수 $f(x) = x^2 - x$ 가 닫힌 구간 $[0, 2]$ 에 속하는 서로 다른 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ 의 값의 집합을 S 라고 할 때, 집합 S 에 속하는 정수의 개수는?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4

<실전 문제 09> 함수 $f(x) = (x-1)(x-3)^2$ 에 대하여 닫힌 구간 $[1, 3]$ 에서 롤의 정리를 만족시키는 상수 c 의 값은?

- ① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{7}{3}$

<실전 문제 10> 함수 $f(x) = x^3$ 일 때,
 $f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$ 를 만족시키는 θ 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \theta$ 의
 값은? (단, $a > 0$, $h > 0$, $0 < \theta < 1$)

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$

02. 자연수의 분할



LECTURE'S POINT

1. 자연수의 분할

(1) 자연수의 분할 : 자연수 n 을 자신보다 크지 않은 k 개의 자연수들의 합으로 나타내는 것. $P(n, k)$

(2) $P(n, 1) = 1, P(n, n) = 1$

(3) $n < k$ 일 때, $P(n, k) = 0$

2. 자연수의 분할의 수

자연수 n 의 분할의 수 : $P(n, 1) + P(n, 2) + \dots + P(n, n)$

3. $P(n, k)$ 의 성질

$1 < k < n$ 일 때,

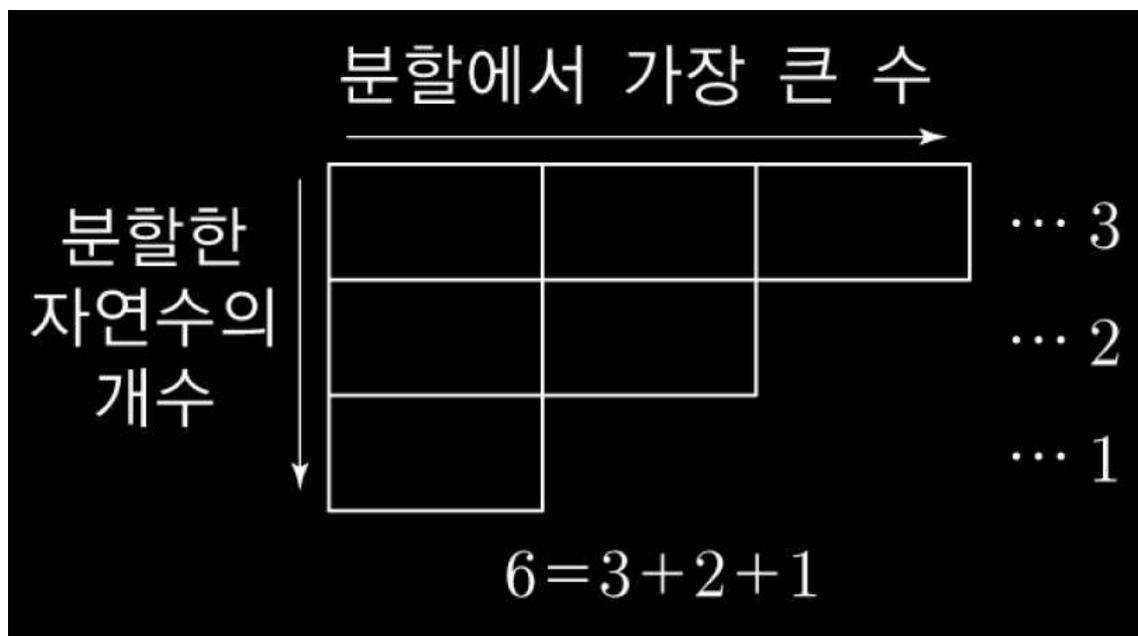
$P(n, k) = P(n-k, 1) + P(n-k, 2) + \dots + P(n-k, k)$



LECTURE'S POINT

4. 그림을 이용한 자연수의 분할

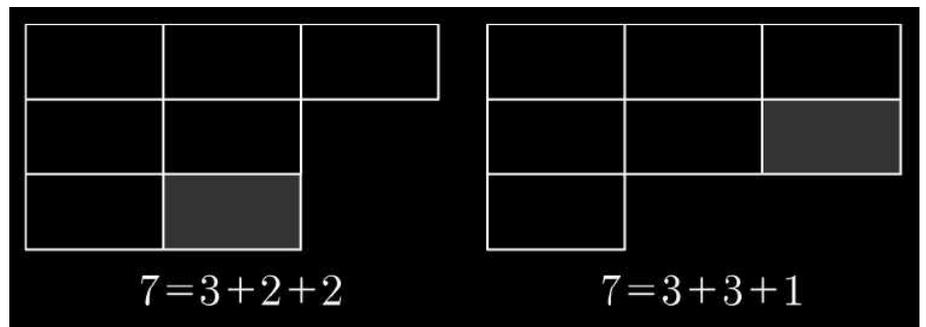
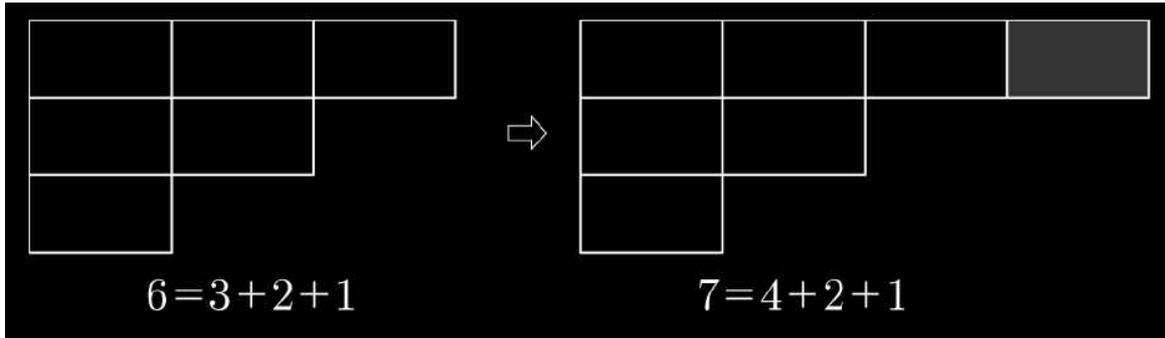
(1)





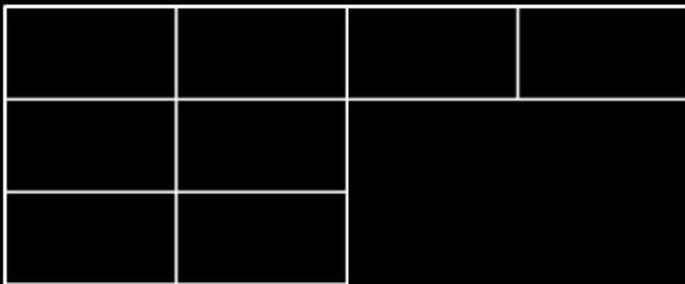
LECTURE'S POINT

4. 그림을 이용한 자연수의 분할
(2)

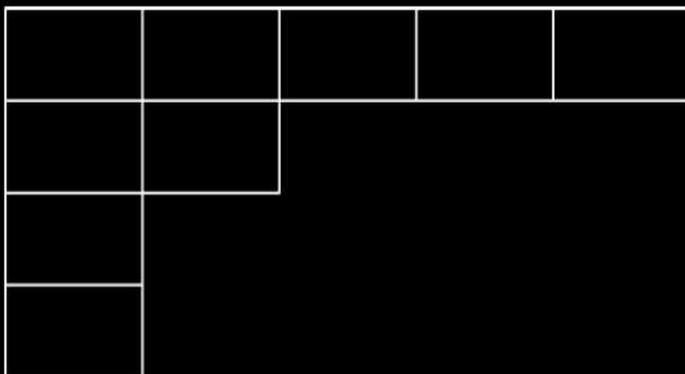


<확인 문제 01> 다음 그림이 나타내는 자연수의 분할을 구해 보자.

(1)



(2)



03. 집합의 분할



LECTURE'S POINT

1. 집합의 분할

(1) 집합의 분할 : 원소의 개수가 n 인 집합을 공집합이 아니면서 서로소인 k 개의 부분집합의 합집합으로 나타내는 것. $S(n, k)$

(2) $S(n, 1) = 1, S(n, n) = 1$

2. 집합의 분할의 수 : $S(n, 1) + S(n, 2) + \dots + S(n, n)$ 3. $S(n, k)$ 의 성질

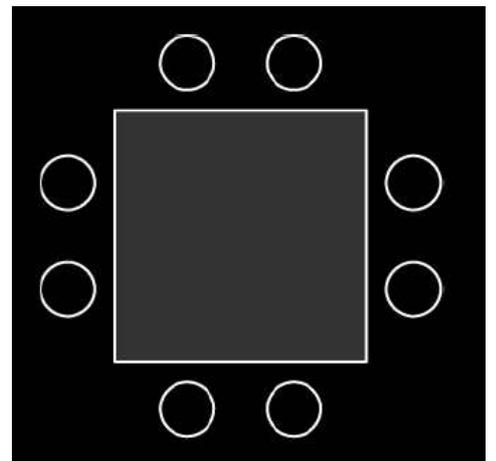
$1 < k < n$ 인 자연수 n, k 에 대하여

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$$

실전 문제

<실전 문제 01> 오른쪽 그림과 같은 정사각형 모양의 탁자에 8명이 둘러앉는 방법의 수는?

- ① $7!$ ② $7! \cdot 2$
 ③ $7! \cdot 4$ ④ $8!$

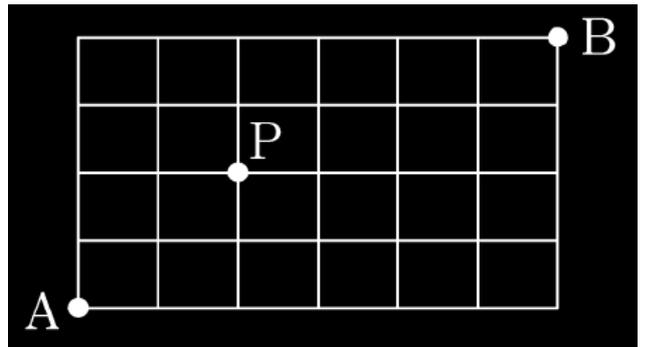


<실전 문제 02> 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5를 중복 사용하여 네 자리 비밀번호를 만들려고 한다. 이때, 1 또는 2를 포함하여 만들 수 있는 비밀번호의 개수는?

- ① 544 ② 550 ③ 556 ④ 562

<실전 문제 03> 오른쪽 그림과 같은 도로망이 있다. A에서 출발하여 P를 거쳐 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는?

- ① 544 ② 550
③ 556 ④ 562



<실전 문제 04> $\sum_{k=1}^3 P(6, k)$ 의 값은?

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7

<실전 문제 05> 10의 분할 중에서 홀수로만 이루어진 분할의 개수는?

- ① 6 ② 7 ③ 10 ④ 11

<실전 문제 06> 똑같은 공 7개를 똑같은 바구니 3개에 나누어 담을 때, 빈 바구니가 없이 나누어 담는 방법의 수는?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4

<실전 문제 07> 똑같은 연필 8자루를 똑같은 필통 4개에 나누어 담는 방법의 수는? (단, 빈 필통이 있어도 된다)

- ① 15 ② 20 ③ 25 ④ 30

<실전 문제 08> $P(9, 4) - P(8, 3)$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4

<실전 문제 09> 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 를 2개의 집합으로 분할하는 방법의 수는?

- ① 15 ② 18 ③ 25 ④ 28

<실전 문제 10> 서로 다른 동전 6개를 똑같은 저금통 2개에 나누어 넣는 방법의 수는? (단, 각 저금통에 한 개 이상의 동전을 넣는다)

- ① 16 ② 20 ③ 26 ④ 31

<실전 문제 11> $P(9, 2) + P(9, 5)$ 의 값은?

- ① 4 ② 7 ③ 9 ④ 13

<실전 문제 12> $P(15, 10)$ 의 값은?

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8

<실전 문제 13> 집합 A 의 한 분할이 $\{1\} \cup \{2, 5\}$ 일 때, 집합 A 의 분할의 수는?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5

<실전 문제 14> 서로 다른 종류의 꽃 4송이를 똑같은 꽃병 2개에 나누어 꽂는 방법의 수는? (단, 각 꽃병에 한 송이 이상의 꽃을 꽂는다)

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8

<실전 문제 15> 6명의 학생이 2명씩 3개의 조로 나누어 경찰서, 소방서, 우체국으로 봉사활동을 가는 방법의 수는?

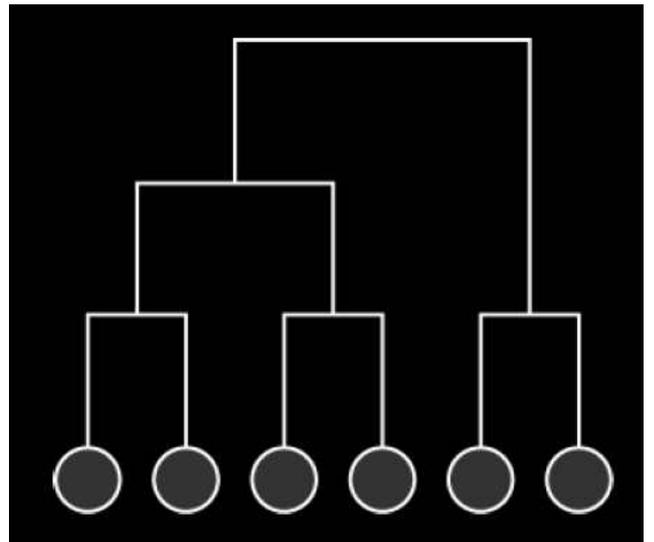
- ① 80 ② 85 ③ 90 ④ 95

<실전 문제 16> $P(4, 2) + P(5, 3) + P(6, 4) + \dots + P(10, 8)$ 의 값은?

- ① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20

<실전 문제 17> 6명이 참가한 토너먼트 경기에서 오른쪽 그림과 같은 대진표를 작성하는 방법의 수는?

- ① 42 ② 45
③ 48 ④ 51



04. 표본비율과 모비율의 추정



LECTURE'S POINT

1. 모비율과 표본비율

- (1) 모비율 : 모집단에서 어떤 사건의 비율
- (2) 표본비율 : 모집단에서 임의추출한 표본에서의 어떤 사건에 대한 비율
- (3) 표본비율의 계산

크기가 n 인 표본에서 어떤 사건이 일어난 횟수를 확률변수 X 라고 할 때, 이 사건에 대한 표본비율 \hat{p} 은

$$\hat{p} = \frac{X}{n}$$



LECTURE'S POINT

2. 표본비율의 확률분포

- (1) 모비율이 p 이고 표본의 크기 n 이 충분히 클 때, 표본비율 \hat{p} 은 근사적으로 정규분포 $N(p, \frac{pq}{n})$ 를 따른다.

- (2) 표본비율 \hat{p} 을 표준화한 확률변수 $Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$ 는

근사적으로 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다. (단, $q = 1 - p$)



LECTURE'S POINT

3. 모비율의 신뢰구간

모집단에서 임의추출한 크기 n 인 표본으로부터 구한 표본비율을

\hat{p} 이라고 할 때, n 이 충분히 크면 모비율 p 의 신뢰구간은 다음과 같다. (단, $\hat{q}=1-\hat{p}$)

(1) 신뢰도 95%의 신뢰구간 :

$$\hat{p} - 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \leq p \leq \hat{p} + 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

(2) 신뢰도 99%의 신뢰구간 :

$$\hat{p} - 2.58 \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \leq p \leq \hat{p} + 2.58 \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

실전 문제

<실전 문제 01> 어느 고등학교 학생 중에서 야간자율학습을 하는 학생의 비율은 20%라 한다. 이 학교의 학생 중에서 n 명을 임의추출하여 조사했을 때, 야간자율학습을 하는 학생의 비율에 대한 분산이 0.002이었다. 이때, n 의 값은?

① 20

② 40

③ 60

④ 80

<실전 문제 02> 어느 공장에서 생산되는 제품의 불량률이 40%라 한다. 이 공장의 제품 중에서 n 개를 임의추출하여 불량률 \hat{p} 을 조사했더니 \hat{p} 은 근사적으로 정규분포 $N(a, b)$ 를 따른다.

이때, $\frac{a}{b} \geq 250$ 이 되도록 하는 n 의 최솟값은?

- ① 150 ② 151 ③ 152 ④ 153

<실전 문제 03> 어느 병원의 환자 20%는 감기환자이다. 이 병원의 환자 중에서 400명을 임의추출할 때, 감기 환자가 100명 이상일 확률은? (단, 오른쪽 표준정규분포표를 이용한다)

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

- ① 0.0062 ② 0.0042 ③ 0.0038 ④ 0.0072

<실전 문제 04> 모비율이 0.5인 모집단에서 크기가 n 인 표본을 임의추출할 때, 표본비율 \hat{p} 에 대하여 $E(\hat{p}) + \sigma(\hat{p}) = 0.55$ 를 만족시키는 n 의 값은? (단, $E(\hat{p})$ 과 $\sigma(\hat{p})$ 은 각각 표본비율 \hat{p} 의 평균과 표준편차이다)

- ① 50 ② 100 ③ 150 ④ 180

<실전 문제 05> 어느 도시에서 혈액형이 O형인 사람의 비율은 10%라 한다. 이 도시에서 100명을 임의추출할 때, 혈액형이 O형인 사람의 비율이 4% 이상 13% 이하일 확률은? (단, 오른쪽 정규분포표를 이용한다)

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

- ① 0.8185 ② 0.8664 ③ 0.9014 ④ 0.9270

<실전 문제 06> 어느 고등학교 학생의 컴퓨터 보유율을 알아보기 위해 이 학교 학생 중에 n 명을 임의추출하여 조사한 결과 80%가 컴퓨터를 보유하고 있었다. 이 학교 학생 전체의 컴퓨터 보유율을 신뢰도 95%로 추정할 때, 신뢰구간의 길이가 0.098 이하가 되도록 하는 n 의 최솟값은? (단, $P(|Z| \leq 1.96) = 0.95$)

- ① 196 ② 225 ③ 256 ④ 289