롤의 정리와 평균값 정리

01. ①

함수 $f(x)=(x+2)(x-2)(x-4)$는 닫힌 구간 $[2,\ 4]$에서 연속이고 열린 구간 $(2,\ 4)$에서 미분가능하며 $f(x)=f(4)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 실수 c가 구간 $(2,\ 4)$에 적어도 하나 존재한다.

$f(x)=(x+2)(x-2)(x-4)$

$\quad =x^3-4x^2-4x+16$

에서 $f'(x)=3x^2-8x-4$

$f'(c)=3c^2-8c-4=0$이므로

$c=\dfrac{4+2\sqrt{7}}{3}\ (\because 2<c<4)$

02. ②

함수 $f(x)=-x^2+6x-8$은 닫힌 구간 $[1,\ 4]$에서 연속이고 열린 구간 $(1,\ 4)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}=f'(c)$인 실수 c가 구간 $(1,\ 4)$에 적어도 하나 존재한다.

$f(x)=-x^2+6x-8$에서 $f'(x)=-2x+6$이므로

$\dfrac{0-(-3)}{4-1}=-2c+6$

$1=-2c+6$

$2c=5$

$\therefore c=\dfrac{5}{2}$

03. ④

함수 $f(x)=x^3+kx+4$는 닫힌 구간 $[-1,\ 2]$에서 연속이고 열린 구간 $(-1,\ 2)$에서 미분가능하므로 롤의 정리를 만족시키는 상수 c가 존재하려면 $f(-1)=f(2)$이어야 한다. 즉

$-1-k+4=8+2k+4 \qquad \therefore k=-3$

$\therefore f(x)=x^3-3x+4$

롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(-1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때, $f'(x)=3x^2-3$이므로 $3c^2-3=0$

$\therefore c=1\ (\because -1<c<2)$

04. ③

함수 $f(x)=x^2-4x+5$는 닫힌 구간 $[1,\ a]$에서 연속이고 열린 구간 $(1,\ a)$에서 미분가능하므로 롤의 정리를 만족시키는 상수 c가 존재하려면 $f(1)=f(a)$이어야 한다. 즉

$1-4+5=a^2-4a+5$

$a^2-4a+3=0$

$(a-1)(a-3)=0 \qquad \therefore a=3\ (\because a>1)$

또, $f'(x)=2x-4$이므로

$f'(c)=2c-4=0 \qquad \therefore c=2$

$\therefore a+c=5$

05. ③

함수 $f(x)=3x^3-x$는 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에서 연속이고 열린 구간 $(-1,\ 1)$에서 미분가능하므로 $\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=f'(c)$인 c가 구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.

이때, $f'(x)=9x^2-1$이므로

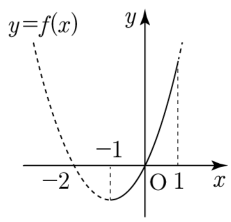
$\dfrac{2-(-2)}{1-(-1)}=9c^2-1,\ 9c^2=3,\ c^2=\dfrac{1}{3}$

$\therefore c=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $c=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

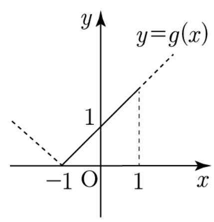
따라서 모든 상수 c의 값의 곱은 $-\dfrac{1}{3}$이다.

06. ④

ㄱ.

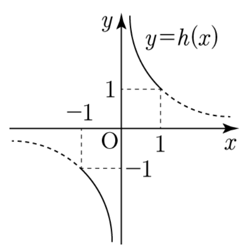


ㄴ.



함수 $f(x)$, $g(x)$는 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에서 연속이고 열린 구간 $(-1,\ 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리를 만족시키는 상수가 존재한다.

ㄷ. 함수 $h(x)=\dfrac{1}{x}$은 $x=0$에서 연속이 아니므로 평균값 정리가 성립하지 않는다.



따라서 평균값 정리를 만족시키는 상수가 존재하는 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

07. ①

함수 $f(x)=x^3-x$는 다항함수이므로
닫힌 구간 $[-\sqrt{3},\ \sqrt{3}]$에서 연속이고
열린 구간 $(-\sqrt{3},\ \sqrt{3})$에서 미분가능하다.
따라서 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(\sqrt{3})-f(-\sqrt{3})}{\sqrt{3}-(-\sqrt{3})}=f'(c)$$

인 c가 열린 구간 $(-\sqrt{3},\ \sqrt{3})$에 적어도 하나 존재한다.
이때, $f'(x)=3x^2-1$이므로

$$\frac{2\sqrt{3}-(-2\sqrt{3})}{\sqrt{3}-(-\sqrt{3})}=3c^2-1$$

$3c^2-1=2$

$c^2-1=0$

$(c+1)(c-1)=0$

$\therefore c=-1$ 또는 $c=1$ $(\because -\sqrt{3}<c<\sqrt{3})$

08. ③

함수 $f(x)=x^2-x$는 다항함수이므로
닫힌 구간 $[0,\ 2]$에서 연속이고 열린 구간 $(0,\ 2)$에서 미분가능하다.
따라서 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)\ (0<x_1<x_2<2)$$

인 c가 열린 구간 $(0,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.
이때, $f'(x)=2x-1$이고 $0<c<2$이므로
$-1<f'(c)<3$ ($\because f'(x)$는 증가함수)
따라서 집합 $S=\{x\mid -1<x<3\}$이므로 집합 S에 속하는 정수는 $0,\ 1,\ 2$로 3개이다.

09. ②

$f(1)=f(3)=0$이므로 롤의 정리에 의해
$f'(c)=0$인 c가 $1<c<3$에서 적어도 하나 존재한다.

$$\begin{aligned} f'(x)&=(x-3)^2+2(x-1)(x-3)\\ &=(x-3)(x-3+2x-2)\\ &=(x-3)(3x-5)\end{aligned}$$

$f'(c)=0$에서 $c=3$ 또는 $c=\dfrac{5}{3}$

이때, $1<c<3$이어야 하므로 $c=\dfrac{5}{3}$

10. ④

$f(x)=x^3$에서 $f'(x)=3x^2$이므로
$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$에서
$(a+h)^3=a^3+h\cdot 3(a+\theta h)^2$
전개하여 정리하면
$3h\theta^2+6a\theta-(3a+h)=0$
θ에 관한 이차방정식의 해를 근의 공식을 이용하여 구하면

$$\theta=\frac{-3a+\sqrt{9a^2+9ah+3h^2}}{3h}\ (\because 0<\theta<1)$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{h\to 0}\theta&=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{9a^2+9ah+3h^2}-3a}{3h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{9a^2+9ah+3h^2-9a^2}{3h\left(\sqrt{9a^2+9ah+3h^2}+3a\right)}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{3a+h}{\sqrt{9a^2+9ah+3h^2}+3a}\\ &=\frac{3a}{6a}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

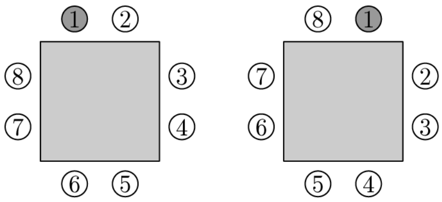
순열과 조합

01. ②

8명을 원형으로 배열하는 방법의 수는

$(8-1)!=7!$

이때 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 정사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



따라서 구하는 방법의 수는 $7!\cdot 2$이다.

02. ①

5개의 숫자를 중복 사용하여 만들 수 있는 네 자리 비밀번호의 개수는

${}_5\Pi_4=5^4=625$

1, 2를 제외한 나머지 세 개의 숫자를 중복 사용하여 만들 수 있는 네 자리 비밀번호의 개수는

${}_3\Pi_4=3^4=81$

따라서 구하는 비밀번호의 개수는

$625-81=544$

03. ③

A에서 P까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}=6$

P에서 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$\dfrac{6!}{4!\cdot 2!}=15$

따라서 구하는 방법의 수는 $6\cdot 15=90$

04. ④

$$\begin{aligned}6&=6\\&=5+1=4+2=3+3\\&=4+1+1=3+2+1=2+2+2\end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{3}P(6,\ k)=P(6,\ 1)+P(6,\ 2)+P(6,\ 3)=1+3+3=7$$

05. ③

10을 홀수로만 이루어지도록 분할하면

$$\begin{aligned}10&=9+1=7+3=5+5\\&=7+1+1+1=5+3+1+1=3+3+3+1\\&=5+1+1+1+1+1=3+3+1+1+1+1\\&=3+1+1+1+1+1+1+1\\&=1+1+1+1+1+1+1+1+1+1\end{aligned}$$

따라서 구하는 분할의 개수는

$3+3+2+1+1=10$

참고 짝수를 홀수로만 이루어지도록 분할하면 짝수 개의 자연수, 즉 2개, 4개, 6개, …의 합으로 나타내어진다.

06. ④

구하는 방법의 수는 7을 3개의 자연수로 분할하는 방법의 수와 같다.

이때 7을 3개의 자연수로 분할하면

$7=5+1+1=4+2+1=3+3+1=3+2+2$

따라서 구하는 방법의 수는

$P(7,\ 3)=4$

07. ①

구하는 방법의 수는 8을 4개 이하의 자연수로 분할하는 방법의 수와 같다.

이때 8을 4개 이하의 자연수로 분할하면

$$\begin{aligned}8&=8\\&=7+1=6+2=5+3=4+4\\&=6+1+1=5+2+1=4+3+1\\&=4+2+2=3+3+2\\&=5+1+1+1=4+2+1+1=3+3+1+1\\&=3+2+2+1=2+2+2+2\end{aligned}$$

따라서 구하는 방법의 수는

$P(8,\ 1)+P(8,\ 2)+P(8,\ 3)+P(8,\ 4)$

$=1+4+5+5=15$

08. ①

$$\begin{aligned}&P(9,\ 4)-P(8,\ 3)\\&=\{P(5,\ 1)+P(5,\ 2)+P(5,\ 3)+P(5,\ 4)\}\\&\quad-\{P(5,\ 1)+P(5,\ 2)+P(5,\ 3)\}\\&=P(5,\ 4)=1\end{aligned}$$

09. ①

(ⅰ) 두 집합의 원소가 각각 1개, 4개인 경우의 수는
$_5C_1 \cdot {_4C_4} = 5 \cdot 1 = 5$

(ⅱ) 두 집합의 원소가 각각 2개, 3개인 경우의 수는
$_5C_2 \cdot {_3C_3} = 10 \cdot 1 = 10$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 구하는 방법의 수는 $5+10=15$

10. ④

(ⅰ) 6개를 1개, 5개로 나누는 방법의 수는
$_6C_1 \cdot {_5C_5} = 6 \cdot 1 = 6$

(ⅱ) 6개를 2개, 4개로 나누는 방법의 수는
$_6C_2 \cdot {_4C_4} = 15 \cdot 1 = 15$

(ⅲ) 6개를 3개, 3개로 나누는 방법의 수는
$_6C_3 \cdot {_3C_3} \cdot \frac{1}{2!} = 20 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 10$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 구하는 방법의 수는
$6+15+10=31$

11. ③

9개를 2개 또는 5개의 자연수로 분할하면

$$\begin{aligned}9 &= 8+1 = 7+2 = 6+3 = 5+4\\ &= 5+1+1+1+1 = 4+2+1+1+1\\ &= 3+3+1+1+1 = 3+2+2+1+1\\ &= 2+2+2+2+1\end{aligned}$$

따라서 $P(9,\ 2)=4$, $P(9,\ 5)=5$이므로
$P(9,\ 2)+P(9,\ 5)=9$

12. ③

$P(15,\ 10)$은 똑같은 물건 15개를 똑같은 상자 10개에 빈 상자가 없이 나누어 담는 방법의 수와 같다. 이것은 먼저 10개를 각 상자에 1개씩 나누어 담은 후 나머지 5개를 각 상자에 나누어 담는 방법의 수와 같으므로

$$\begin{aligned}P(15,\ 10) &= P(5,\ 1)+P(5,\ 2)+P(5,\ 3)\\ &\quad +P(5,\ 4)+P(5,\ 5)\end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned}5 &= 5\\ &= 4+1 = 3+2\\ &= 3+1+1 = 2+2+1\\ &= 2+1+1+1\\ &= 1+1+1+1+1\end{aligned}$$

이므로 구하는 값은
$P(5,\ 1)+P(5,\ 2)+P(5,\ 3)+P(5,\ 4)+P(5,\ 5)$
$=1+2+2+1+1=7$

13. ④

$A=\{1\}\cup\{2,\ 5\}=\{1,\ 2,\ 5\}$이므로 집합 A를 분할하면

$$\begin{aligned}A &= \{1,\ 2,\ 5\}\\ &= \{1\}\cup\{2,\ 5\} = \{2\}\cup\{1,\ 5\} = \{5\}\cup\{1,\ 2\}\\ &= \{1\}\cup\{2\}\cup\{5\}\end{aligned}$$

따라서 구하는 분할의 수는 5이다.

14. ③

(ⅰ) 1송이, 3송이로 나누어 꽂는 방법의 수는
$_4C_1 \cdot {_3C_3} = 4 \cdot 1 = 4$

(ⅱ) 2송이, 2송이로 나누어 꽂는 방법의 수는
$_4C_2 \cdot {_2C_2} \cdot \frac{1}{2!} = 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 3$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 구하는 방법의 수는 $4+3=7$

15. ③

6명의 학생을 2명씩 3개의 조로 나누는 방법의 수는
$_6C_2 \cdot {_4C_2} \cdot {_2C_2} \cdot \frac{1}{3!} = 15 \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = 15$

3개의 조를 각각 경찰서, 소방서, 우체국으로 분배하는 방법의 수는 $3!=6$이다.
따라서 구하는 방법의 수는 $15 \cdot 6 = 90$

16. ①

$4=3+1=2+2$
$5=3+1+1=2+2+1$
$6=3+1+1+1=2+2+1+1$
$7=3+1+1+1+1=2+2+1+1+1$
$\vdots$

즉 4 이상의 자연수 n에 대하여 $P(n,\ n-2)=2$임을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}\therefore\ & P(4,\ 2)+P(5,\ 3)+P(6,\ 4)+\cdots+P(10,\ 8)\\ &= 2 \cdot 7 = 14\end{aligned}$$

참고 $P(n,\ n-2)$는 똑같은 물건 n개를 똑같은 상자 $(n-2)$개에 빈 상자가 없이 나누어 담는 방법의 수와 같다.
따라서 먼저 $(n-2)$개를 각 상자에 1개씩 나누어 담은 후 나머지 2개를 각 상자에 나누어 담는 방법의 수와 같으므로

$$\begin{aligned}P(n,\ n-2) &= P(2,\ 1)+P(2,\ 2)\\ &= 1+1 = 2\end{aligned}$$

17. ②

(ⅰ) 6명을 2명, 4명으로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_2 \cdot {}_4C_4 = 15 \cdot 1 = 15$$

(ⅱ) 4명을 2명, 2명으로 나누는 방법의 수는

$${}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!} = 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 구하는 방법의 수는 $15 \times 3 = 45$이다.

표본비율과 모비율의 추정

01. ④

모비율이 0.2이고 표본의 크기가 n일 때, 표본비율 $\hat{p}$에 대한 분산이 0.002이므로

$$\mathrm{V}(\hat{p}) = \frac{0.2 \times 0.8}{n} = 0.002$$

$$\therefore n = \frac{0.16}{0.002} = 80$$

02. ①

모비율이 0.4이고 표본의 크기가 n이므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(0.4,\ \frac{0.4 \times 0.6}{n}\right)$을 따른다.

즉, $a = 0.4,\ b = \frac{0.24}{n}$이므로 $\frac{a}{b} \geq 250$에서

$$\frac{0.4}{\frac{0.24}{n}} \geq 250$$

$$\frac{n}{0.6} \geq 250$$

$$\therefore n \geq 150$$

따라서 n의 최솟값은 150이다.

03. ①

임의추출한 환자 400명 중에서 감기 환자의 비율을 $\hat{p}$이라 하면

$\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(0.2,\ \frac{0.2 \times 0.8}{400}\right)$,

즉 $\mathrm{N}(0.2,\ 0.02^2)$을 따르므로 $Z = \frac{\hat{p} - 0.2}{0.02}$로 놓으면

Z는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\hat{p} \geq \frac{100}{400}\right) &= \mathrm{P}(\hat{p} \geq 0.25) \\
&= \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{0.25 - 0.2}{0.02}\right) \\
&= \mathrm{P}(Z \geq 2.5) \\
&= 0.5 - \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2.5) \\
&= 0.5 - 0.4938 \\
&= 0.0062
\end{aligned}$$

04. ②

모비율이 0.5, 표본의 크기가 n이므로

$$\mathrm{E}(\hat{p}) = 0.5,\quad \sigma(\hat{p}) = \sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{n}} = \frac{0.5}{\sqrt{n}}$$

$\mathrm{E}(\hat{p}) + \sigma(\hat{p}) = 0.55$에서

$$0.5 + \frac{0.5}{\sqrt{n}} = 0.55$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = 0.1$$

$$\sqrt{n} = 10$$

$$\therefore n = 100$$

05. ①

임의추출한 100명 중에서 혈액형이 O형인 사람의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포

$\mathrm{N}\left(0.1,\ \frac{0.1 \times 0.9}{100}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(0.1,\ 0.03^2)$을 따르므로

$Z = \frac{\hat{p} - 0.1}{0.03}$로 놓으면 Z는 근사적으로 표준정규분포

$\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(0.04 \leq \hat{p} \leq 0.13) \\
&= \mathrm{P}\left(\frac{0.04 - 0.1}{0.03} \leq Z \leq \frac{0.13 - 0.1}{0.03}\right) \\
&= \mathrm{P}(-2 \leq Z \leq 1) \\
&= \mathrm{P}(-2 \leq Z \leq 0) + \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1) \\
&= \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2) + \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1) \\
&= 0.4772 + 0.3413 \\
&= 0.8185
\end{aligned}$$

06. ③

모비율 p의 신뢰도 $\alpha\%$의 신뢰구간의 길이는

$2k\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ (단, $\mathrm{P}(|Z| \leq k) = \frac{\alpha}{100}$)임을 이용한다.

표본비율이 $\hat{p} = 0.8$이고 표본의 크기가 n이므로

$$2 \times 1.96\sqrt{\frac{0.8 \times 0.2}{n}} \leq 0.098$$

$$\sqrt{n} \geq 16$$

$$\therefore n \geq 256$$

따라서 n의 최솟값은 256이다.