

롤의 정리와 평균값 정리

01. ①

함수 $f(x) = (x+2)(x-2)(x-4)$ 는 닫힌 구간 $[2, 4]$ 에서 연속이고 열린 구간 $(2, 4)$ 에서 미분가능하므로 롤의 정리를 만족시키는 상수 c 가 존재하려면 $f(2) = f(4)$ 이어야 한다.

$$f(x) = (x+2)(x-2)(x-4) \\ = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$$

$$\text{에서 } f'(x) = 3x^2 - 8x - 4$$

$$f'(c) = 3c^2 - 8c - 4 = 0 \text{ 이므로}$$

$$c = \frac{4+2\sqrt{7}}{3} \quad (\because 2 < c < 4)$$

02. ②

함수 $f(x) = -x^2 + 6x - 8$ 는 닫힌 구간 $[1, 4]$ 에서 연속이고 열린 구간 $(1, 4)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(4)-f(1)}{4-1} = f'(c)$ 인 실수 c 가 구간 $(1, 4)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f(x) = -x^2 + 6x - 8 \text{에서 } f'(x) = -2x + 6 \text{ 이므로}$$

$$\frac{0 - (-3)}{4-1} = -2c + 6$$

$$1 = -2c + 6$$

$$2c = 5$$

$$\therefore c = \frac{5}{2}$$

03. ④

함수 $f(x) = x^3 + kx + 4$ 는 닫힌 구간 $[-1, 2]$ 에서 연속이고 열린 구간 $(-1, 2)$ 에서 미분가능하므로 롤의 정리를 만족시키는 상수 c 가 존재하려면 $f(-1) = f(2)$ 이어야 한다. 즉

$$-1 - k + 4 = 8 + 2k + 4 \quad \therefore k = -3$$

$$\therefore f(x) = x^3 - 3x + 4$$

롤의 정리에 의하여 $f'(c) = 0$ 인 c 가 구간 $(-1, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$\text{이때, } f'(x) = 3x^2 - 3 \text{ 이므로 } 3c^2 - 3 = 0$$

$$\therefore c = 1 \quad (\because -1 < c < 2)$$

04. ③

함수 $f(x) = x^2 - 4x + 5$ 는 닫힌 구간 $[1, a]$ 에서 연속이고 열린 구간 $(1, a)$ 에서 미분가능하므로 롤의 정리를 만족시키는 상수 c 가 존재하려면 $f(1) = f(a)$ 이어야 한다. 즉

$$1 - 4 + 5 = a^2 - 4a + 5$$

$$a^2 - 4a + 3 = 0$$

$$(a-1)(a-3) = 0 \quad \therefore a = 3 \quad (\because a > 1)$$

$$\text{또, } f'(x) = 2x - 4 \text{ 이므로}$$

$$f'(c) = 2c - 4 = 0 \quad \therefore c = 2$$

$$\therefore a + c = 5$$

05. ③

함수 $f(x) = 3x^3 - x$ 는 닫힌 구간 $[-1, 1]$ 에서 연속이고 열린 구간 $(-1, 1)$ 에서 미분가능하므로

$$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = f'(c) \text{인 } c \text{가 구간 } (-1, 1) \text{에 적어도}$$

하나 존재한다.

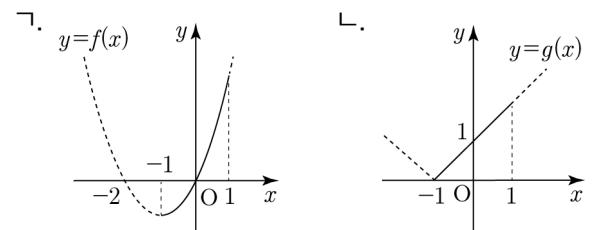
$$\text{이때, } f'(x) = 9x^2 - 1 \text{ 이므로}$$

$$\frac{2 - (-2)}{1 - (-1)} = 9c^2 - 1, \quad 9c^2 = 3, \quad c^2 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore c = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 또는 } c = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 모든 상수 c 의 값의 곱은 $-\frac{1}{3}$ 이다.

06. ④

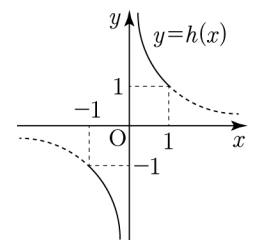


함수 $f(x), g(x)$ 는 닫힌 구간 $[-1, 1]$ 에서 연속이고 열린 구간 $(-1, 1)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리를 만족시키는 상수가 존재한다.

$$\text{ㄷ. 함수 } h(x) = \frac{1}{x} \text{ 은 } x = 0$$

에서 연속이 아니므로 평균값 정리가 성립하지 않는다.

따라서 평균값 정리를 만족시키는 상수가 존재하는 함수는 ㄱ, ㄴ이다.



07. ①

함수 $f(x) = x^3 - x$ 는 다항함수이므로
닫힌 구간 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ 에서 연속이고
열린 구간 $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 에서 미분가능하다.

따라서 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(\sqrt{3}) - f(-\sqrt{3})}{\sqrt{3} - (-\sqrt{3})} = f'(c)$$

인 c 가 열린 구간 $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때, $f'(x) = 3x^2 - 1$ 이므로

$$\frac{2\sqrt{3} - (-2\sqrt{3})}{\sqrt{3} - (-\sqrt{3})} = 3c^2 - 1$$

$$3c^2 - 1 = 2$$

$$c^2 - 1 = 0$$

$$(c+1)(c-1) = 0$$

$$\therefore c = -1 \text{ 또는 } c = 1 \quad (\because -\sqrt{3} < c < \sqrt{3})$$

08. ③

함수 $f(x) = x^2 - x$ 는 다항함수이므로
닫힌 구간 $[0, 2]$ 에서 연속이고 열린 구간 $(0, 2)$ 에서
미분가능하다.

따라서 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \quad (0 < x_1 < x_2 < 2)$$

인 c 가 열린 구간 $(0, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때, $f'(x) = 2x - 1$ 이고 $0 < c < 2$ 이므로

$-1 < f'(c) < 3$ ($\because f'(x)$ 는 증가함수)

따라서 집합 $S = \{x \mid -1 < x < 3\}$ 이므로 집합 S 에
속하는 정수는 0, 1, 2로 3개이다.

09. ②

$f(1) = f(3) = 0$ 이므로 롤의 정리에 의해

$f'(c) = 0$ 인 c 가 $1 < c < 3$ 에서 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x) = (x-3)^2 + 2(x-1)(x-3)$$

$$= (x-3)(x-3+2x-2)$$

$$= (x-3)(3x-5)$$

$$f'(c) = 0 \text{에서 } c = 3 \text{ 또는 } c = \frac{5}{3}$$

이때, $1 < c < 3$ 이어야 하므로 $c = \frac{5}{3}$

10. ④

$f(x) = x^3$ 에서 $f'(x) = 3x^2$ 이므로

$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$ 에서

$$(a+h)^3 = a^3 + h \cdot 3(a+\theta h)^2$$

전개하여 정리하면

$$3h\theta^2 + 6a\theta - (3a+h) = 0$$

θ 에 관한 이차방정식의 해를 근의 공식을 이용하여
구하면

$$\theta = \frac{-3a + \sqrt{9a^2 + 9ah + 3h^2}}{3h} \quad (\because 0 < \theta < 1)$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \theta = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9a^2 + 9ah + 3h^2} - 3a}{3h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9a^2 + 9ah + 3h^2 - 9a^2}{3h(\sqrt{9a^2 + 9ah + 3h^2} + 3a)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3a+h}{\sqrt{9a^2 + 9ah + 3h^2} + 3a}$$

$$= \frac{3a}{6a} = \frac{1}{2}$$

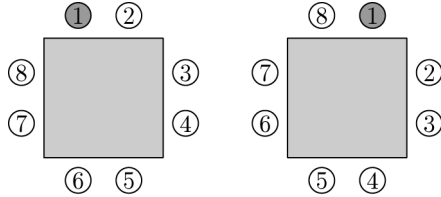
순열과 조합

01. ②

8명을 원형으로 배열하는 방법의 수는

$$(8-1)! = 7!$$

이때 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 정사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



따라서 구하는 방법의 수는 $7! \cdot 2$ 이다.

02. ①

5개의 숫자를 중복 사용하여 만들 수 있는 네 자리 비밀번호의 개수는

$${}_5\Pi_4 = 5^4 = 625$$

1, 2를 제외한 나머지 세 개의 숫자를 중복 사용하여 만들 수 있는 네 자리 비밀번호의 개수는

$${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$$

따라서 구하는 비밀번호의 개수는

$$625 - 81 = 544$$

03. ③

A에서 P까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$$\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

P에서 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$$\frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$$

따라서 구하는 방법의 수는 $6 \cdot 15 = 90$

04. ④

$$6 = 6$$

$$= 5 + 1 = 4 + 2 = 3 + 3$$

$$= 4 + 1 + 1 = 3 + 2 + 1 = 2 + 2 + 2$$

$$\therefore \sum_{k=1}^3 P(6, k) = P(6, 1) + P(6, 2) + P(6, 3)$$

$$= 1 + 3 + 3 = 7$$

05. ③

10을 홀수로만 이루어지도록 분할하면

$$10 = 9 + 1 = 7 + 3 = 5 + 5$$

$$= 7 + 1 + 1 + 1 = 5 + 3 + 1 + 1 = 3 + 3 + 3 + 1$$

$$= 5 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1$$

$$= 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

따라서 구하는 분할의 개수는

$$3 + 3 + 2 + 1 + 1 = 10$$

참고 짝수를 홀수로만 이루어지도록 분할하면 짝수 개의 자연수, 즉 2개, 4개, 6개, ...의 합으로 나타내어진다.

06. ④

구하는 방법의 수는 7을 3개의 자연수로 분할하는 방법의 수와 같다.

이때 7을 3개의 자연수로 분할하면

$$7 = 5 + 1 + 1 = 4 + 2 + 1 = 3 + 3 + 1 = 3 + 2 + 2$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$P(7, 3) = 4$$

07. ①

구하는 방법의 수는 8을 4개 이하의 자연수로 분할하는 방법의 수와 같다.

이때 8을 4개 이하의 자연수로 분할하면

$$8 = 8$$

$$= 7 + 1 = 6 + 2 = 5 + 3 = 4 + 4$$

$$= 6 + 1 + 1 = 5 + 2 + 1 = 4 + 3 + 1$$

$$= 4 + 2 + 2 = 3 + 3 + 2$$

$$= 5 + 1 + 1 + 1 = 4 + 2 + 1 + 1 = 3 + 3 + 1 + 1$$

$$= 3 + 2 + 2 + 1 = 2 + 2 + 2 + 2$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$P(8, 1) + P(8, 2) + P(8, 3) + P(8, 4)$$

$$= 1 + 4 + 5 + 5 = 15$$

08. ①

$$P(9, 4) - P(8, 3)$$

$$= \{P(5, 1) + P(5, 2) + P(5, 3) + P(5, 4)\}$$

$$- \{P(5, 1) + P(5, 2) + P(5, 3)\}$$

$$= P(5, 4) = 1$$

09. ①

- (i) 두 집합의 원소가 각각 1개, 4개인 경우의 수는
 ${}_5C_1 \cdot {}_4C_4 = 5 \cdot 1 = 5$
 (ii) 두 집합의 원소가 각각 2개, 3개인 경우의 수는
 ${}_5C_2 \cdot {}_3C_3 = 10 \cdot 1 = 10$
 (i), (ii)에 의해 구하는 방법의 수는 $5 + 10 = 15$

10. ④

- (i) 6개를 1개, 5개로 나누는 방법의 수는
 ${}_6C_1 \cdot {}_5C_5 = 6 \cdot 1 = 6$
 (ii) 6개를 2개, 4개로 나누는 방법의 수는
 ${}_6C_2 \cdot {}_4C_4 = 15 \cdot 1 = 15$
 (iii) 6개를 3개, 3개로 나누는 방법의 수는
 ${}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!} = 20 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 10$
 (i), (ii), (iii)에 의해 구하는 방법의 수는
 $6 + 15 + 10 = 31$

11. ③

- 9개를 2개 또는 5개의 자연수로 분할하면
 $9 = 8 + 1 = 7 + 2 = 6 + 3 = 5 + 4$
 $= 5 + 1 + 1 + 1 + 1 = 4 + 2 + 1 + 1 + 1$
 $= 3 + 3 + 1 + 1 + 1 = 3 + 2 + 2 + 1 + 1$
 $= 2 + 2 + 2 + 2 + 1$
 따라서 $P(9, 2) = 4$, $P(9, 5) = 5$ 이므로
 $P(9, 2) + P(9, 5) = 9$

12. ③

- $P(15, 10)$ 은 똑같은 물건 15개를 똑같은 상자 10개에 빈 상자가 없이 나누어 담는 방법의 수와 같다. 이것은 먼저 10개를 각 상자에 1개씩 나누어 담은 후 나머지 5개를 각 상자에 나누어 담는 방법의 수와 같으므로
 $P(15, 10) = P(5, 1) + P(5, 2) + P(5, 3)$
 $+ P(5, 4) + P(5, 5)$

이때

$$\begin{aligned} 5 &= 5 \\ &= 4 + 1 = 3 + 2 \\ &= 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 \\ &= 2 + 1 + 1 + 1 \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \end{aligned}$$

이므로 구하는 값은

$$\begin{aligned} P(5, 1) + P(5, 2) + P(5, 3) + P(5, 4) + P(5, 5) \\ = 1 + 2 + 2 + 1 + 1 = 7 \end{aligned}$$

13. ④

- $A = \{1\} \cup \{2, 5\} = \{1, 2, 5\}$ 이므로 집합 A 를 분할하면
 $A = \{1, 2, 5\}$
 $= \{1\} \cup \{2, 5\} = \{2\} \cup \{1, 5\} = \{5\} \cup \{1, 2\}$
 $= \{1\} \cup \{2\} \cup \{5\}$
 따라서 구하는 분할의 수는 5이다.

14. ③

- (i) 1송이, 3송이로 나누어 꽃는 방법의 수는
 ${}_4C_1 \cdot {}_3C_3 = 4 \cdot 1 = 4$
 (ii) 2송이, 2송이로 나누어 꽃는 방법의 수는
 ${}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!} = 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 3$
 (i), (ii)에 의해 구하는 방법의 수는 $4 + 3 = 7$

15. ③

- 6명의 학생을 2명씩 3개의 조로 나누는 방법의 수는
 ${}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{3!} = 15 \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = 15$
 3개의 조를 각각 경찰서, 소방서, 우체국으로 분배하는 방법의 수는 $3! = 6$ 이다.
 따라서 구하는 방법의 수는 $15 \cdot 6 = 90$

16. ①

- $4 = 3 + 1 = 2 + 2$
 $5 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1$
 $6 = 3 + 1 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 + 1$
 $7 = 3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 + 1 + 1$
 \vdots
 즉 4 이상의 자연수 n 에 대하여 $P(n, n-2) = 2$ 임을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \therefore P(4, 2) + P(5, 3) + P(6, 4) + \cdots + P(10, 8) \\ = 2 \cdot 7 = 14 \end{aligned}$$

참고 $P(n, n-2)$ 는 똑같은 물건 n 개를 똑같은 상자 $(n-2)$ 개에 빈 상자가 없이 나누어 담는 방법의 수와 같다.

따라서 먼저 $(n-2)$ 개를 각 상자에 1개씩 나누어 담은 후 나머지 2개를 각 상자에 나누어 담는 방법의 수와 같으므로

$$\begin{aligned} P(n, n-2) &= P(2, 1) + P(2, 2) \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

17. ②

(i) 6명을 2명, 4명으로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_2 \cdot {}_4C_4 = 15 \cdot 1 = 15$$

(ii) 4명을 2명, 2명으로 나누는 방법의 수는

$${}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!} = 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

(i), (ii)에 의해 구하는 방법의 수는 $15 \times 3 = 45$ 이다.

표본비율과 모비율의 추정

01. ④

모비율이 0.2이고 표본의 크기가 n 일 때, 표본비율 \hat{p} 에 대한 분산이 0.002이므로

$$V(\hat{p}) = \frac{0.2 \times 0.8}{n} = 0.002$$

$$\therefore n = \frac{0.16}{0.002} = 80$$

02. ①

모비율이 0.4이고 표본의 크기가 n 이므로 표본비율 \hat{p} 은 근사적으로 정규분포 $N\left(0.4, \frac{0.4 \times 0.6}{n}\right)$ 을 따른다.

즉, $a = 0.4$, $b = \frac{0.24}{n}$ 이므로 $\frac{a}{b} \geq 250$ 에서

$$\frac{0.4}{\frac{0.24}{n}} \geq 250$$

$$\frac{n}{0.6} \geq 250$$

$$\therefore n \geq 150$$

따라서 n 의 최솟값은 150이다.

03. ①

임의추출한 환자 400명 중에서 감기 환자의 비율을 \hat{p} 이라 하면

\hat{p} 은 근사적으로 정규분포 $N\left(0.2, \frac{0.2 \times 0.8}{400}\right)$,

즉 $N(0.2, 0.02^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{\hat{p} - 0.2}{0.02}$ 로 놓으면

Z 는 근사적으로 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P\left(\hat{p} \geq \frac{100}{400}\right) &= P(\hat{p} \geq 0.25) \\ &= P\left(Z \geq \frac{0.25 - 0.2}{0.02}\right) \\ &= P(Z \geq 2.5) \\ &= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 2.5) \\ &= 0.5 - 0.4938 \\ &= 0.0062 \end{aligned}$$

04. ②

모비율이 0.5, 표본의 크기가 n 이므로

$$E(\hat{p}) = 0.5, \sigma(\hat{p}) = \sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{n}} = \frac{0.5}{\sqrt{n}}$$

$$E(\hat{p}) + \sigma(\hat{p}) = 0.55 \text{에서}$$

$$0.5 + \frac{0.5}{\sqrt{n}} = 0.55$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = 0.1$$

$$\sqrt{n} = 10$$

$$\therefore n = 100$$

05. ①

임의추출한 100명 중에서 혈액형이 O형인 사람의 비율을 \hat{p} 이라 하면 \hat{p} 은 근사적으로 정규분포

$N\left(0.1, \frac{0.1 \times 0.9}{100}\right)$, 즉 $N(0.1, 0.03^2)$ 을 따르므로

$Z = \frac{\hat{p} - 0.1}{0.03}$ 로 놓으면 Z 는 근사적으로 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} &P(0.04 \leq \hat{p} \leq 0.13) \\ &= P\left(\frac{0.04 - 0.1}{0.03} \leq Z \leq \frac{0.13 - 0.1}{0.03}\right) \\ &= P(-2 \leq Z \leq 1) \\ &= P(-2 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= P(0 \leq Z \leq 2) + P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.4772 + 0.3413 \\ &= 0.8185 \end{aligned}$$

06. ③

모비율 p 의 신뢰도 $\alpha\%$ 의 신뢰구간의 길이는

$$2k\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \quad (\text{단, } P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha}{100}) \text{임을 이용한다.}$$

표본비율이 $\hat{p} = 0.8$ 이고 표본의 크기가 n 이므로

$$2 \times 1.96 \sqrt{\frac{0.8 \times 0.2}{n}} \leq 0.098$$

$$\sqrt{n} \geq 16$$

$$\therefore n \geq 256$$

따라서 n 의 최솟값은 256이다.