추록

도함수의 활용

순열과 조합

통계적 추정

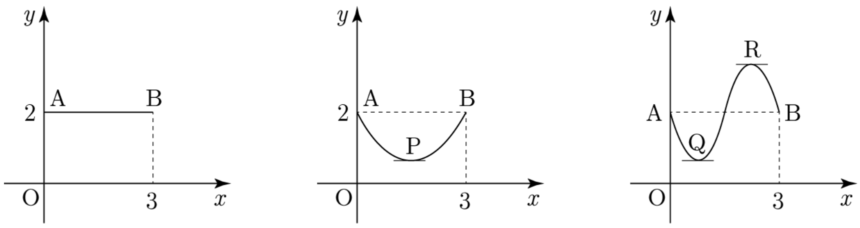
1 롤의 정리와 평균값 정리

1. 롤의 정리

(1) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능할 때,
$f(a)=f(b)$이면 $f'(c)=0$ $(a<c<b)$인 c가 적어도 하나 존재한다.

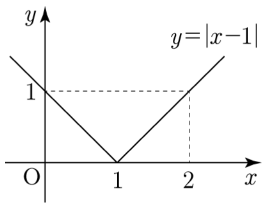
(2) 롤의 정리는 곡선 $y=f(x)$에서 $f(a)=f(b)$이면 x축과 평행한 접선을 갖는 점이 구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재함을 의미한다.

예1



세 경우 모두 접선의 기울기가 0이 되는 점이 구간 $(0,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.
이는 좌표평면에서 y좌표가 같은 두 점을 미분가능한 함수의 그래프로 연결한 경우 항상 성립하는 성질이다.

반례



$[0,\ 2]$에서 연속이고, $f(0)=f(2)=1$이지만 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(0,\ 2)$에서 존재하지 않는다.
$y=|x-1|$이 $x=1$에서 미분불가능이기 때문이다.

확인문제1 함수 $f(x)=(x-1)(x+1)(x-2)$에 대하여 닫힌 구간 $[1,\ 2]$에서 롤의 정리를 만족시키는 상수 c의 값은?

① $\dfrac{2-\sqrt{7}}{3}$ ② -1 ③ 1 ④ $\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}$

풀이 $[1,\ 2]$에서 연속이고, $(1,\ 2)$에서 미분가능하며 $f(1)=f(2)=0$이므로
롤의 정리에 의해 $f'(c)=0$인 c가 $1<c<2$에서 존재한다.
$f'(c)=3c^2-4c-1=0$이므로
$c=\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}$ $(\because 1<c<2)$

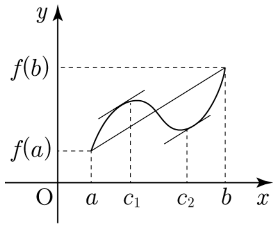
정답 ④

2. 평균값 정리

(1) 평균값 정리

함수 $y=f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능할 때,

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$가 되는 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.



(2) 평균값 정리는 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 잇는 직선과 평행한 접선을 갖는 점이 구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재함을 의미한다.

(3) 평균값 정리에서 $f(a)=f(b)$인 경우가 롤의 정리이다.

예 2

점 A에서 점 B까지 부드러운 곡선으로 끊어지지 않게 이어보면 직선 AB와 평행한 접선을 갖는 점이 반드시 생긴다.

확인 문제 2 함수 $f(x)=x^3-2x$에서 닫힌 구간 $[0,\ 3]$에서 평균값 정리를 만족시키는 c의 값은?

① $\sqrt{2}$　　② $\sqrt{3}$　　③ $\sqrt{6}$　　④ $\sqrt{7}$

풀이 닫힌 구간 $[0,\ 3]$에서 연속이고, 열린 구간 $(0,\ 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의해

$\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}=7=f'(c)$

이때, $f'(x)=3x^2-2$이므로

$3c^2-2=7$

$3c^2=9$

$\therefore c=\sqrt{3}\ (\because 0<x<3)$

실전 문제

01. 다음 함수에 대하여 닫힌 구간 $[2,\ 4]$에서 롤의 정리를 만족시키는 실수 c의 값은?

$$f(x)=(x+2)(x-2)(x-4)$$

① $\dfrac{4+2\sqrt{7}}{3}$ ② $\dfrac{4+2\sqrt{7}}{4}$ ③ $\dfrac{4-3\sqrt{7}}{2}$ ④ $\dfrac{4+3\sqrt{7}}{2}$

02. 다음 함수에 대하여 닫힌 구간 $[1,\ 4]$에서 평균값 정리를 만족시키는 실수 c의 값은?

$$f(x)=-x^2+6x-8$$

① $\dfrac{3}{2}$ ② $\dfrac{5}{2}$ ③ $\dfrac{4}{3}$ ④ $\dfrac{5}{3}$

03. 함수 $f(x)=x^3+kx+4$에 대하여 닫힌 구간 $[-1,\ 2]$에서 롤의 정의를 만족시키는 상수 c의 값은? (단, k는 상수이다)

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1

04. 함수 $f(x)=x^2-4x+5$에 대하여 닫힌 구간 $[1,\ a]$에서 롤의 정리를 만족시키는 상수 c가 존재할 때, $a+c$의 값은? (단, $1<c<a$)

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6

05. 함수 $f(x)=3x^3-x$에 대하여 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에서 평균값 정리를 만족시키는 모든 상수 c의 값의 곱은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{3}$ ④ $-\frac{1}{5}$

06. 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수가 존재하는 함수만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $f(x)=x^2+2x$	ㄴ. $g(x)=\lvert x+1\rvert$	ㄷ. $h(x)=\frac{1}{x}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ

07. 함수 $f(x)=x^3-x$에 대하여 닫힌 구간 $[-\sqrt{3},\ \sqrt{3}]$에서 평균값 정리를 만족시키는 c의 값은?

① -1 또는 1 ② 1 또는 2 ③ 2 또는 3 ④ 3 또는 4

08. 함수 $f(x)=x^2-x$가 닫힌 구간 $[0,\ 2]$에 속하는 서로 다른 임의의 두 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$의 값의 집합을 S라고 할 때, 집합 S에 속하는 정수의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4

09. 함수 $f(x)=(x-1)(x-3)^2$에 대하여 닫힌 구간 $[1,\ 3]$에서 롤의 정리를 만족시키는 상수 c의 값은?

① $\dfrac{4}{3}$ ② $\dfrac{5}{3}$ ③ 2 ④ $\dfrac{7}{3}$

10. 함수 $f(x)=x^3$일 때, $f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$를 만족시키는 θ의 값에 대하여 $\lim\limits_{h\to 0}\theta$의 값은? (단, $a>0,\ h>0,\ 0<\theta<1$)

① $\dfrac{1}{5}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{3}$ ④ $\dfrac{1}{2}$

2 자연수의 분할

1. 자연수의 분할

(1) 자연수의 분할 : 자연수 n을 자신보다 크지 않은 자연수 n_1, n_2, n_3, $\cdots$, n_k의 합

$n = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k \ (n \ge n_1 \ge n_2 \ge n_3 \ge \cdots \ge n_k)$

와 같이 나타내는 것을 그 **자연수의 분할**이라 하고, 자연수 n을 k개의 자연수로 분할하는 방법의 수를 $\boldsymbol{P(n,\ k)}$로 나타낸다.

즉, 어떤 자연수를 순서를 생각하지 않고 몇 개의 자연수의 합으로 나타내는 것을 자연수의 분할이라고 한다.

(2) $P(n,\ 1)=1$, $P(n,\ n)=1$

(3) $n<k$일 때, $P(n,\ k)=0$

예1 5의 모든 분할을 구하면

$5=5$
$=4+1=3+2$
$=3+1+1=2+2+1$
$=2+1+1+1$
$=1+1+1+1+1$

이므로

$P(5,\ 1)=1$, $P(5,\ 2)=2$, $P(5,\ 3)=2$, $P(5,\ 4)=1$, $P(5,\ 5)=1$

예2 똑같은 물건 n개를 똑같은 상자 k개에 빈 상자가 없이 나누어 담는 방법의 수는 자연수 n을 k개의 자연수로 분할하는 방법의 수인 $P(n,\ k)$와 같다.

2. 자연수의 분할의 수

자연수 n의 분할의 수는

$P(n,\ 1)+P(n,\ 2)+P(n,\ 3)+\cdots+P(n,\ n)$

3. $P(n,\ k)$의 성질

$1<k<n$일 때,

$P(n,\ k)=P(n-k,\ 1)+P(n-k,\ 2)+P(n-k,\ 3)+\cdots+P(n-k,\ k)$

예3 똑같은 구슬 n개를 똑같은 상자 k개에 빈 상자가 없이 나누어 담는 방법의 수를 이용하여 위의 성질을 확인할 수 있다.

즉, $P(n,\ k)$는 n개의 구슬을 k개의 상자에 1개씩 담은 후 나머지 $(n-k)$개의 구슬을 1개, 2개, 3개, $\cdots$, k개의 상자에 나누어 담는 방법의 수와 같으므로

$P(n,\ k)=P(n-k,\ 1)+P(n-k,\ 2)+P(n-k,\ 3)+\cdots+P(n-k,\ k)$

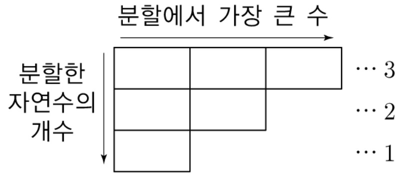
예4 (1) $P(9,\ 4)=P(5,\ 1)+P(5,\ 2)+P(5,\ 3)+P(5,\ 4)$

(2) $P(9,\ 5)=P(4,\ 1)+P(4,\ 2)+P(4,\ 3)+P(4,\ 4)\ (\because P(4,\ 5)=0)$

4. 그림을 이용한 자연수의 분할

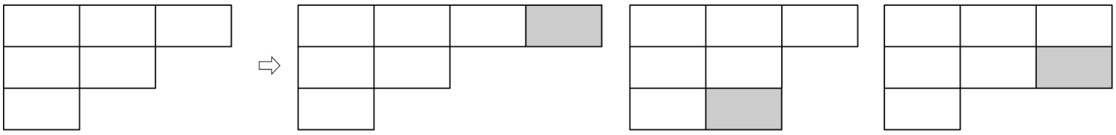
자연수의 분할을 그림으로 설명하여 보자.

(1) 예를 들어 6을 3개의 자연수로 분할하는 방법 중 하나인 $6=3+2+1$을 오른쪽 그림과 같이 나타낼 수 있다.
이때, 각 가로줄의 칸 수는 6의 분할을 구성하고 있는 숫자 3, 2, 1을 나타내며, 가장 긴 가로줄의 칸 수 3은 분할에서 가장 큰 수를 뜻한다.
또 가장 긴 세로줄의 칸 수는 분할한 자연수의 개수를 뜻한다. 즉, 6을 3개의 수로 분할한 것을 나타낸다.

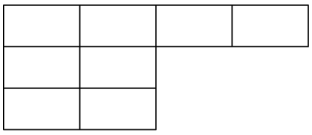


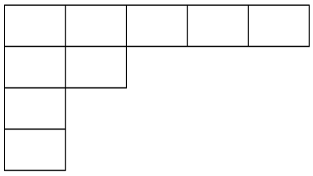
$6=3+2+1$

(2) 이제 $n-1$의 분할을 이용하여 n의 분할을 구하는 방법에 대하여 알아보자.
예를 들어 (1)에서 구한 6의 한 분할인 $3+2+1$을 나타낸 그림에서 다음과 같이 각 가로줄의 오른쪽 끝이나 맨 왼쪽 세로줄의 끝에 한 칸을 추가할 때마다 7의 분할이 만들어진다.


$6=3+2+1$ ⇨ $7=4+2+1$, $7=3+2+2$, $7=3+3+1$

확인 문제1 다음 그림이 나타내는 자연수의 분할을 구해 보자.

(1)


(2)


풀이 (1) $8=4+2+2$
(2) $9=5+2+1+1$

3 집합의 분할

1. 집합의 분할

(1) **집합의 분할** : 원소의 개수가 n인 집합을 공집합이 아니면서 서로소인 k개의 부분집합의 합집합으로 나타내는 것을 그 **집합의 분할**이라 하고, 원소의 개수가 n인 집합을 k개의 부분집합으로 분할하는 방법의 수를 $\boldsymbol{S(n,\ k)}$로 나타낸다.

(2) $S(n,\ 1)=1,\ S(n,\ n)=1$

예1 집합 $\{a,\ b,\ c\}$의 모든 분할을 구하면

$$\begin{aligned}\{a,\ b,\ c\}&=\{a,\ b,\ c\}\\&=\{a\}\cup\{b,\ c\}=\{b\}\cup\{a,\ c\}=\{c\}\cup\{a,\ b\}\\&=\{a\}\cup\{b\}\cup\{c\}\end{aligned}$$

이므로 $S(3,\ 1)=1,\ S(3,\ 2)=3,\ S(3,\ 3)=1$

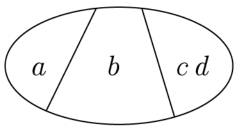
예2 서로 다른 물건 n개를 똑같은 상자 k개에 빈 상자가 없이 나누어 담는 방법의 수는 원소의 개수가 n인 집합을 k개의 집합으로 분할하는 방법의 수인 $S(n,\ k)$와 같다.

2. 집합의 분할의 수

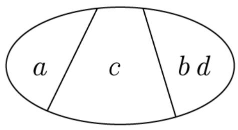
원소의 개수가 n인 집합의 분할의 수는

$S(n,\ 1)+S(n,\ 2)+S(n,\ 3)+\cdots+S(n,\ n)$

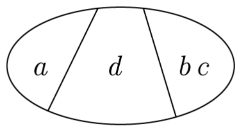
예3 집합 $\{a,\ b,\ c,\ d\}$를 공집합이 아닌 서로소인 세 부분집합으로 나누는 경우는 다음 그림과 같다.



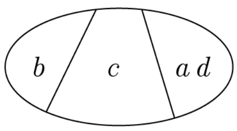
$\{a\}\cup\{b\}\cup\{c, d\}$



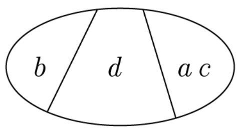
$\{a\}\cup\{c\}\cup\{b, d\}$



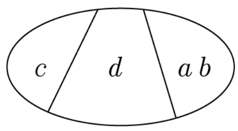
$\{a\}\cup\{d\}\cup\{b, c\}$



$\{b\}\cup\{c\}\cup\{a, d\}$



$\{b\}\cup\{d\}\cup\{a, c\}$



$\{c\}\cup\{d\}\cup\{a, b\}$

따라서 원소 4개인 집합 $\{a,\ b,\ c,\ d\}$를 공집합이 아닌 서로소인 세 부분집합으로 나누는 방법의 수가 6가지이므로 이것을 기호로 나타내면 $S(4,\ 3)=6$이다.

또한 $S(4,\ 3)$의 값을 조합을 이용한 분할의 수로 구해 보면 $S(4,\ 3)$은 원소 4개인 집합을 원소가 각각 1개, 1개, 2개인 부분집합으로 분할하는 경우이므로 4개의 원소 중에서 1개를 택하고 남은 3개의 원소에서 1개를 택하고 남은 2개의 원소에서 2개를 택하되 겹치는(중복되는) 경우가 $2!$가지씩 생기게 되므로 구하는 분할의 수는

$${}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2\times\frac{1}{2!}=4\times3\times1\times\frac{1}{2}=6$$

3. $S(n,\ k)$의 성질

$1<k<n$인 자연수 $n,\ k$에 대하여

$S(n,\ k)=S(n-1,\ k-1)+kS(n-1,\ k)$

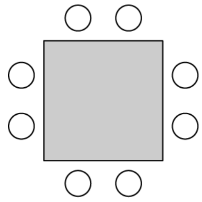
예4 (1) $S(3,\ 2)=S(2,\ 1)+2S(2,\ 2)=1+2\cdot1=3\leftarrow S(2,\ 1)=1,\ S(2,\ 2)=1$

(2) $S(4,\ 2)=S(3,\ 1)+2S(3,\ 2)=1+2\cdot3=7\leftarrow S(3,\ 1)=1,\ S(3,\ 2)=3$

(3) $S(4,\ 3)=S(3,\ 2)+3S(3,\ 3)=3+3\cdot1=6$

실전 문제

01. 오른쪽 그림과 같은 정사각형 모양의 탁자에 8명이 둘러앉는 방법의 수는?



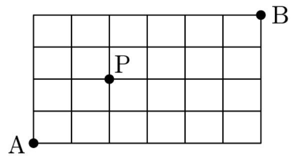
① $7!$ ② $7! \cdot 2$

③ $7! \cdot 4$ ④ $8!$

02. 5개의 숫자 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$를 중복 사용하여 네 자리 비밀번호를 만들려고 한다. 이때, 1 또는 2를 포함하여 만들 수 있는 비밀번호의 개수는?

① 544 ② 550 ③ 556 ④ 562

03. 오른쪽 그림과 같은 도로망이 있다. A에서 출발하여 P를 거쳐 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는?



① 70 ② 80

③ 90 ④ 100

04. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} P(6,\ k)$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7

05. 10의 분할 중에서 홀수로만 이루어진 분할의 개수는?

① 6 ② 7 ③ 10 ④ 11

06. 똑같은 공 7개를 똑같은 바구니 3개에 나누어 담을 때, 빈 바구니가 없이 나누어 담는 방법의 수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4

07. 똑같은 연필 8자루를 똑같은 필통 4개에 나누어 담는 방법의 수는? (단, 빈 필통이 있어도 된다)

① 15 ② 20 ③ 25 ④ 30

08. $P(9,\ 4)-P(8,\ 3)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4

09. 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$를 2개의 집합으로 분할하는 방법의 수는?

① 15 ② 18 ③ 25 ④ 28

10. 서로 다른 동전 6개를 똑같은 저금통 2개에 나누어 넣는 방법의 수는? (단, 각 저금통에 한 개 이상의 동전을 넣는다)

① 16 ② 20 ③ 26 ④ 31

11. $P(9,\ 2)+P(9,\ 5)$의 값은?

① 4 ② 7 ③ 9 ④ 13

12. $P(15,\ 10)$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8

13. 집합 A의 한 분할이 $\{1\} \cup \{2, 5\}$일 때, 집합 A의 분할의 수는?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5

14. 서로 다른 종류의 꽃 4송이를 똑같은 꽃병 2개에 나누어 꽂는 방법의 수는? (단, 각 꽃병에 한 송이 이상의 꽃을 꽂는다)

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8

15. 6명의 학생이 2명씩 3개의 조로 나누어 경찰서, 소방서, 우체국으로 봉사활동을 가는 방법의 수는?

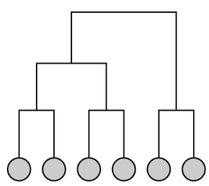
① 80 ② 85 ③ 90 ④ 95

16. $P(4,\ 2)+P(5,\ 3)+P(6,\ 4)+\cdots+P(10,\ 8)$의 값은?

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20

17. 6명이 참가한 토너먼트 경기에서 오른쪽 그림과 같은 대진표를 작성하는 방법의 수는?

① 42 ② 45
③ 48 ④ 51



4 표본비율과 모비율의 추정

1. 모비율과 표본비율

(1) 모비율 : 모집단에서 어떤 사건에 대한 비율

(2) 표본비율 : 모집단에서 임의추출한 표본에서의 어떤 사건에 대한 비율

(3) 표본비율의 계산

크기가 n인 표본에서 어떤 사건이 일어난 횟수를 확률변수 X라고 할 때, 이 사건에 대한 표본비율 $\hat{p}$은

$$\hat{p}=\frac{X}{n}$$

예1 텔레비전 프로그램의 시청률, 제품의 불량률 등과 같이 모집단에서 어떤 사건에 대한 비율을 고려할 때, 그 비율을 그 사건에 대한 **모비율**이라 하고 이것을 기호로 p와 같이 나타낸다.
한편, 어떤 드라마의 시청률이 30%라고 할 때, 이 시청률은 TV를 시청할 수 있는 모든 가구를 대상으로 조사한 것이 아니라 전체 가구 중에서 일부만을 대상으로 조사한 것이다. 이와 같이 모집단에서 임의추출한 표본에서의 비율을 그 사건에 대한 **표본비율**이라고 한다. 이때, 표본비율을 기호로 $\hat{p}$과 같이 나타내고, 피햇(p-hat)이라고 읽는다.

2. 표본비율의 확률분포

(1) 모비율이 p이고 표본의 크기 n이 충분히 클 때, 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(p,\ \frac{pq}{n}\right)$를 따른다.

(2) 표본비율 $\hat{p}$을 표준화한 확률변수 $Z=\dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. (단, $q=1-p$)

증명 모비율은 상수이지만 표본비율은 선택되는 표본에 따라 그 값이 변하는 확률변수이므로 평균과 분산 및 표준편차를 구할 수 있다. 표본비율 $\hat{p}=\frac{X}{n}$에서 확률변수 X는 크기가 n인 표본에서 어떤 사건이 일어나는 횟수이므로 X가 취할 수 있는 값은 0, 1, 2, ⋯, n이며, 모집단에서 이 사건이 일어날 확률은 p이다. 즉, 확률변수 X는 어떤 사건이 일어날 확률이 p인 시행을 n번 독립시행하였을 때, 그 사건이 일어난 횟수이므로 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따른다.
따라서 확률변수 X의 평균과 분산은 각각

$$\mathrm{E}(X)=np,\ \mathrm{V}(X)=npq\ (\text{단, } q=1-p)$$

이고, 확률변수의 성질에 의하여 표본비율 $\hat{p}$의 평균과 분산 및 표준편차는 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(\hat{p})=\mathrm{E}\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{1}{n}\mathrm{E}(X)=\frac{np}{n}=p\ (\because \mathrm{E}(aX)=a\mathrm{E}(X))$$

$$\mathrm{V}(\hat{p})=\mathrm{V}\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\mathrm{V}(X)=\frac{npq}{n^2}=\frac{pq}{n}\ (\because \mathrm{V}(aX)=a^2\mathrm{V}(X))$$

$$\sigma(\hat{p})=\sqrt{\mathrm{V}(\hat{p})}=\sqrt{\frac{pq}{n}}$$

일반적으로 표본의 크기 n이 충분히 클 때, 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(p,\ \frac{pq}{n}\right)$를 따른다. 따라서 표본의 크기 n이 충분히 클 때, 표본비율 $\hat{p}$을 표준화한 확률변수 Z는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. 이때, 표본의 크기 n이 충분히 크다는 것은 일반적으로 $np \geq 5$이고 $nq \geq 5$일 때를 뜻한다.

예2 $Z=\dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$의 분자와 분모에 각각 n을 곱하면 $Z=\dfrac{X-np}{\sqrt{npq}}$이고, 이 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$에 가까워진다는 사실은 이항분포와 정규분포의 관계의 결과와 일치한다.

3. 모비율의 신뢰구간

모집단에서 임의추출한 크기 n인 표본으로부터 구한 표본비율을 $\hat{p}$이라고 할 때, n이 충분히 크면 모비율 p의 신뢰구간은 다음과 같다. (단, $\hat{q}=1-\hat{p}$)

(1) 신뢰도 95%의 신뢰구간 : $\hat{p}-1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \le p \le \hat{p}+1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

신뢰구간의 길이 : $2\times 1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

(2) 신뢰도 99%의 신뢰구간 : $\hat{p}-2.58\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \le p \le \hat{p}+2.58\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

신뢰구간의 길이 : $2\times 2.58\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

증명 모평균의 신뢰구간은 표본평균을 이용하여 추정하였듯이 모비율의 신뢰구간은 표본비율을 이용하여 추정할 수 있다. 즉, 모평균의 추정에서 배운 방법으로 모비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간, 신뢰도 99%의 신뢰구간을 구할 수 있다.

(1) 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하였을 때, 어떤 사건이 일어날 횟수를 확률변수 X라고 하면 표본비율 $\hat{p}=\dfrac{X}{n}$는 n이 충분히 클 때 정규분포 $\mathrm{N}\left(p,\ \dfrac{pq}{n}\right)$(단, $q=1-p$)에 가까워진다.

이때, 확률변수 $Z=\dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

또한 표본의 크기 n이 충분히 클 때, 표본비율 $\hat{p}$의 분산 $\dfrac{pq}{n}$에서 미지의 값인 p, q 대신 표본비율 $\hat{p}$, $\hat{q}$ (단, $\hat{q}=1-\hat{p}$)을 대입한 $Z=\dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$도 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. 이때, 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(-1.96\le Z\le 1.96)=0.95$이므로

$$\mathrm{P}\left(-1.96\le \dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}}\le 1.96\right)=0.95$$

각 변에 $\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$을 곱한다.

$$\mathrm{P}\left(-1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le \hat{p}-p\le 1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)=0.95$$

각 변에 (-1)을 곱하면 부등호의 방향이 바뀐다.

$$\mathrm{P}\left(1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\ge p-\hat{p}\ge -1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)=0.95$$

각 변에 $\hat{p}$을 더해 주고, 부등호 방향을 작은 것이 왼쪽에 오도록 한다.

$$\mathrm{P}\left(\hat{p}-1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le \hat{p}+1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)=0.95$$

따라서 모비율 p의 신뢰도 95%의 신뢰구간은 다음과 같다.

$$\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \le p \le \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \quad \cdots \text{㉠}$$

이때, 신뢰구간의 길이는 $2\times1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$ 이다.

(2) 같은 방법으로 $\mathrm{P}(-2.58 \le Z \le 2.58)=0.99$임을 이용하면 모비율 p의 신뢰도 99%의 신뢰구간을 구할 수 있다.

㉠에서 표본비율 $\hat{p}$은 확률변수이므로 표본의 크기 n이 일정할 때, 추출되는 표본에 따라 그 값이 달라지고 신뢰구간도 달라진다. 이와 같은 신뢰구간 중에는 모비율 p를 포함하는 것과 포함되지 않는 것이 있을 수 있다. 즉, 모비율 p의 신뢰도 95%의 신뢰구간이란 표본이 달라짐에 따라 달라지는 신뢰구간 중에서 약 95%는 모비율 p를 포함한다는 뜻이다.

실전 문제

01. 어느 고등학교 학생 중에서 야간자율학습을 하는 학생의 비율은 20%라 한다. 이 학교의 학생 중에서 n명을 임의추출하여 조사했을 때, 야간자율학습을 하는 학생의 비율에 대한 분산이 0.002이었다. 이때, n의 값은?

① 20 ② 40 ③ 60 ④ 80

02. 어느 공장에서 생산되는 제품의 불량률이 40%라 한다. 이 공장의 제품 중에서 n개를 임의추출하여 불량률 $\hat{p}$을 조사했더니 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(a,\ b)$를 따른다고 한다. 이때, $\frac{a}{b} \geq 250$이 되도록 하는 n의 최솟값은?

① 150 ② 151 ③ 152 ④ 153

03. 어느 병원의 환자 20%는 감기 환자이다. 이 병원의 환자 중에서 400명을 임의추출할 때, 감기 환자가 100명 이상일 확률은? (단, 오른쪽 표준정규분포표를 이용한다)

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.0062 ② 0.0042
③ 0.0038 ④ 0.0072

04. 모비율이 0.5인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본비율 $\hat{p}$에 대하여 $\mathrm{E}(\hat{p})+\sigma(\hat{p})=0.55$를 만족시키는 n의 값은? (단, $\mathrm{E}(\hat{p})$과 $\sigma(\hat{p})$은 각각 표본비율 $\hat{p}$의 평균과 표준편차이다)

① 50　② 100　③ 150　④ 180

05. 어느 도시에서 혈액형이 O형인 사람의 비율은 10%라 한다. 이 도시에서 100명을 임의추출할 때, 혈액형이 O형인 사람의 비율이 4% 이상 13% 이하일 확률은? (단, 오른쪽 표준정규분포표를 이용한다)

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.8185　② 0.8664
③ 0.9014　④ 0.9270

06. 어느 고등학교 학생의 컴퓨터 보유율을 알아보기 위해 이 학교 학생 중에 n명을 임의추출하여 조사한 결과 80%가 컴퓨터를 보유하고 있었다. 이 학교 학생 전체의 컴퓨터 보유율을 신뢰도 95%로 추정할 때, 신뢰구간의 길이가 0.098 이하가 되도록 하는 n의 최솟값은? (단, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$)

① 196　② 225　③ 256　④ 289

인사혁신처 공고 제2015-614호에 따른 [2016 해커스 공무원 수학] 삭제 및 수정 내용

수학 1권
고등수학(상)·(하)

위치	현재 내용	수정 사항
31p	확인 문제 15	문제 삭제
36p	실전 문제 08	문제 삭제
39p	대표 문제	문제 삭제
40p	대표 문제	문제 삭제
43p	LECTURE'S POINT 명제의 이	내용 삭제
44p	LECTURE'S NOTE 원래 명제는 참이나 그 이는 거짓이다. [반례] $x=-5$	내용 삭제
49p	실전 문제 05	문제 삭제
52p	닫혀 있다	내용 삭제
53p	닫혀 있다	페이지 전체 삭제
54p	LECTURE'S POINT 2. 덧셈과 곱셈에 대한 항등원 3. 덧셈과 곱셈에 대한 역원	내용 삭제
55~57p	항등원, 역원	페이지 전체 삭제
64p	유형 문제 01, 02	문제 삭제
65p	실전 문제 01	문제 삭제
67p	실전 문제 09, 11	문제 삭제
71p	대표 문제	문제 삭제
72p	덧셈과 곱셈에 대한 항등원과 역원	페이지 전체 삭제
76p	유형 문제 02	문제 삭제
104~107p	약수와 배수	페이지 전체 삭제
109p	실전 문제 03	문제 삭제
115~116p	번분수식과 그 계산	페이지 전체 삭제
118~121p	비례식의 계산	페이지 전체 삭제
124p	무리식	페이지 전체 삭제
126~133p	이중근호, 무리수의 상등	페이지 전체 삭제
160~162p	공통근, 부정방정식	페이지 전체 삭제
163p	유형 문제 01, 02	문제 삭제
164p	실전 문제 01	문제 삭제
318~367p	삼각함수	단원 전체 삭제

수학 1권
고등수학(상)·(하) 풀이집

위치	현재 내용	수정 사항
5p	확인 문제 15 풀이	풀이 삭제
6p	실전 문제 08 풀이	풀이 삭제
8p	실전 문제 05 풀이	풀이 삭제
9p	확인 문제 01, 02, 03, 04, 05 풀이 실전 문제 01 풀이	풀이 삭제
10p	실전 문제 09, 11 풀이	풀이 삭제
11p	확인 문제 04 풀이	풀이 삭제
15p	확인 문제 25 풀이	풀이 삭제
16p	확인 문제 26, 27 풀이 실전 문제 03 풀이	풀이 삭제
17p	확인 문제 04 풀이	풀이 삭제
18p	확인 문제 05, 07, 08, 09, 10 풀이	풀이 삭제
19p	확인 문제 13, 14, 16, 17, 18 풀이	풀이 삭제
19~21p	실전 문제 01~16 풀이	풀이 삭제
24p	확인 문제 25, 26 풀이	풀이 삭제
25p	확인 문제 27 풀이 실전 문제 01 풀이	풀이 삭제
59~70p	삼각함수	페이지 전체 삭제

수학 2권
수학 I · 미적분과 통계 기본

위치	현재 내용	수정 사항
8~39p	I 행렬과 그래프	단원 전체 삭제
48~58p	지수함수, 지수방정식, 지수부등식	페이지 전체 삭제
59p	유형 문제 02, 03	문제 삭제
60~63p	실전 문제 02, 03, 04, 07, 08, 09, 11, 12, 15, 16	문제 삭제
70~71p	상용로그의 지표와 가수	지표 → 정수 부분 가수 → 소수 부분
72~85p	로그함수, 로그방정식, 로그부등식	페이지 전체 삭제
86p	유형 문제 01, 02, 03	문제 삭제
87~91	실전 문제 04, 05, 06, 07, 08, 11, 13, 14, 15, 19, 20	문제 삭제
97~98p	조화수열	내용 삭제
118~120p	계차수열과 군수열, 멱급수	페이지 전체 삭제
125~134p	여러 가지 점화식, 수학적 귀납법과 알고리즘	내용 삭제
136~139p	실전 문제 02, 04, 07, 08, 12, 13, 16	문제 삭제
152p	실전 문제 09	문제 삭제
154~165p	무한급수	무한급수 → 급수 무한등비급수 → 등비급수
162~163p	실전 문제 03, 05	문제 삭제
169p	확인 문제 02	문제 삭제
182p	샌드위치 정리 예를 들어 $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$를 구해 보자.	예 수정 예를 들어 $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x}-x}{x+3}$의 값을 구해 보자. $x\to\infty$에서 $x>0$이므로 $x^2<x^2+2x<x^2+2x+1$이 성립한다. 따라서 다음 식이 성립한다. $\frac{\sqrt{x^2}-x}{x+3}<\frac{\sqrt{x^2+2x}-x}{x+3}<\frac{\sqrt{x^2+2x+1}-x}{x+3}$ $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2}-x}{x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-x}{x+3}=0$ $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+1}-x}{x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1-x}{x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+3}=0$ 이므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x}-x}{x+3}=0$이다.
182p	확인 문제 14	문제 삭제
187p	실전 문제 13	문제 삭제

193p	참고 4. 삼각함수 5. 지수함수 6. 로그함수	내용 삭제
194p	확인 문제 04	문제 삭제
199p	실전 문제 13	문제 삭제
217p	접하는 두 곡선	접하는 두 곡선 다음에 롤의 정리, 평균값 정리 추가(추록 1~2p)
243p	대표 문제	문제 삭제
308~309p	연속확률변수의 평균, 분산, 표준편차	내용 삭제
319p	실전 문제 14번의 ㄷ	보기ㄷ 삭제
324p	모평균의 추정	모평균의 추정 다음에 표본비율과 모비율의 추정 추가(추록 13~15p)

수학 2권
수학Ⅰ·미적분과 통계 기본 풀이집

위치	현재 내용	수정 사항
4~9p	행렬과 그래프	페이지 전체 삭제
10~11p	확인 문제 05~17 풀이 실전 문제 02 풀이	풀이 삭제
12~13p	실전 문제 03, 04, 07, 08, 09, 11, 12, 15, 16 풀이	풀이 삭제
14p	실전 문제 12, 13 풀이	지표 → 정수 부분 가수 → 소수 부분
15~16p	확인 문제 14~30 풀이	풀이 삭제
17~19p	실전 문제 04, 05, 06, 07, 08, 11, 13, 14, 15, 19, 20 풀이	풀이 삭제
20p	확인 문제 06 풀이	풀이 삭제
25p	확인 문제 06, 07, 08 풀이	풀이 삭제
27~28p	확인 문제 03~09 풀이	풀이 삭제
28~31p	실전 문제 02, 04, 07, 08, 12, 13, 16 풀이	풀이 삭제
33p	실전 문제 09 풀이	풀이 삭제
34~38p	무한급수	무한급수 → 급수 무한등비급수 → 등비급수
36p	실전 문제 03, 05 풀이	풀이 삭제
40p	확인 문제 02 풀이	풀이 삭제
41p	확인 문제 14 풀이	풀이 삭제
43p	실전 문제 13 풀이	풀이 삭제
44p	확인 문제 04 풀이	풀이 삭제
46p	실전 문제 13 풀이	풀이 삭제
65p	확인 문제 06 풀이	풀이 삭제
67p	실전 문제 14의 ㄷ풀이	풀이 삭제 (정답 수정 없음)

본문

위치	현재 내용	수정 사항
29p	명제의 이	내용 삭제
32p	1. 닫혀있다 3. 항등원과 역원	내용 삭제
32p	대표 문제	문제 삭제
33~34p	기출 문제, 예상문제 01~07	문제 삭제 (페이지 전체 삭제)
40p	(4) 항등원 (5) 역원	내용 삭제
41p	기출 문제 02	문제 삭제
57p	예상 문제 08	문제 삭제
58p	예상 문제 10	문제 삭제
60p	2. 비례식 3. 비례식의 성질	내용 삭제
60p	대표 문제	문제 삭제
61~64p	기출 문제 01 예상 문제 02~06, 08~12	문제 삭제
65p	2. 이중근호의 변형	내용 삭제
62p	대표 문제	문제 삭제
67~69p	예상 문제 07~13	문제 삭제
79p	예상 문제 07	조건 추가 (단, 뚜껑이 있는 직원기둥이다)
80p	2. 부정방정식	내용 삭제
81p	예상 문제 03	문제 삭제
150~173p	14 삼각함수 15 삼각함수의 활용	페이지 전체 삭제
176~191p	16 행렬	페이지 전체 삭제
193p	예상 문제 03	문제 삭제
195~203p	Theme 52 지수함수 Theme 53 지수방정식과 지수부등식	페이지 전체 삭제
205p	기출 문제 01	문제 삭제
207p	예상 문제 10	문제 삭제
208~210p	Theme 55 상용로그	지표 → 정수 부분 가수 → 소수 부분
211~219p	Theme 56 로그함수 Theme 57 로그방정식과 로그부등식	페이지 전체 삭제

220p	2. 조화수열	내용 삭제
238p	예상 문제 20	문제 삭제
239~240p	Theme 63 여러 가지 수열	페이지 전체 삭제
241p	2. 기본적인 점화식 중 (5) 조화수열 3. 여러 가지 점화식	내용 삭제
242p	기출 문제 01, 04	문제 삭제
243~245p	예상 문제 07~15	문제 삭제
252~257p	무한급수, 무한등비급수	무한급수 → 급수 무한등비급수 → 등비급수
267p	예상 문제 12	문제 삭제
384p	일차함수의 그래프가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, 그래프의 기울기는 $\tan\theta$ 이다.	내용 삭제
285p	예상 문제 03	문제 삭제
345p	연속확률변수의 평균, 분산, 표준편차	내용 삭제
348p	예상 문제 09	문제 삭제
370~375p	수학 만점 받기 53~65, 68~70, 72~75	문제 삭제

풀이집

위치	현재 내용	수정 사항
8~9p	Theme 05 실수의 연산 01~07	풀이 삭제
10p	Theme 08 복소수의 연산 02	풀이 삭제
17p	Theme 11 인수분해 08, 10	풀이 삭제
18~19p	Theme 12 유리식 01~06, 08~12	풀이 삭제
20~21p	Theme 13 무리식 07~13	풀이 삭제
25p	Theme 17 연립방정식과 부정방정식 03	풀이 삭제
50~63p	14 삼각함수 (Theme 38~41) 15 삼각함수의 활용 (Theme 42~45) 16 행렬 (Theme 46~50)	풀이 삭제
63p	Theme 51 지수 03	풀이 삭제
63~66p	Theme 52 지수함수 Theme 53 지수방정식과 지수부등식	풀이 삭제
66~67p	Theme 54 로그 01, 10	풀이 삭제
67~68p	Theme 55 상용로그	지표 → 정수 부분 가수 → 소수 부분
69~72p	Theme 56 로그함수 Theme 57 로그방정식과 로그부등식	풀이 삭제
78p	Theme 62 합의 기호 $\sum$ 20	풀이 삭제
79~80p	Theme 63 여러 가지 수열	풀이 삭제

80~82p	Theme 64 수열의 귀납적 정의 01, 04, 07~15	풀이 삭제
85~87p	Theme 66 무한급수 Theme 67 무한등비급수	무한급수 → 급수 무한등비급수 → 등비급수
90p	Theme 69 함수의 극한값 12	풀이 삭제
117p	Theme 97 연속확률변수 09	풀이 삭제
130~134p	수학 만점 받기 53~65, 68~70, 72~75	풀이 삭제